Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

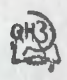
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЕРЕРАБОТАНО
В. А. ЕФРЕМОВЫМ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Цена 65 коп.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

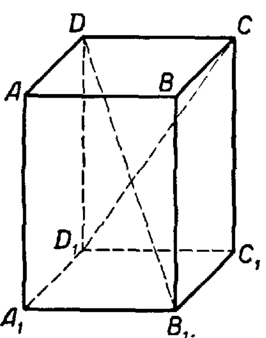
МОСКВА 1936

§ 1. Перпендикуляр и наклонные к плоскости.

1. На чертеже 1 изображён прямоугольный параллелепипед.

1) Пересекаются ли прямые DB_1 и D_1C? BB_1 и D_1C?

2) Возможно ли провести плоскость через прямые AD и B_1C_1? через DC и DB_1? через BC и AA_1?

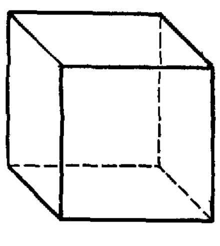


Черт. 1.

2. Провести плоскость, проходящую через концы трёх рёбер куба, выходящих из одной вершины. Ребро куба равно a. Вычислить площадь сечения (черт. 2).

3. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 3 *см*, 4 *см* и 7 *см*. Определить площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

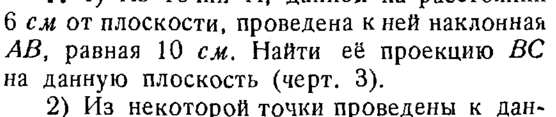
4. Основанием правильной призмы служит треугольник со стороной a. Высота призмы равна b. Провести плоскость через одну из сторон нижнего основания и через противоположную вершину верхнего основания. Вычислить площадь полученного сечения.



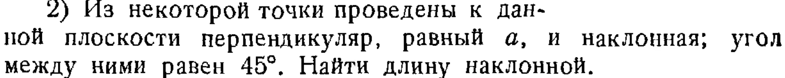
Черт. 2.

5. Через точку, взятую на прямой, провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой.

6. Через точку, взятую вне прямой, провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой.



7. 1) Из точки A, данной на расстоянии 6 *см* от плоскости, проведена к ней наклонная AB, равная 10 *см*. Найти её проекцию BC на данную плоскость (черт. 3).



2) Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный a, и наклонная; угол между ними равен 45°. Найти длину наклонной.

8. Определить на данной плоскости геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от точки, лежащей вне плоскости.

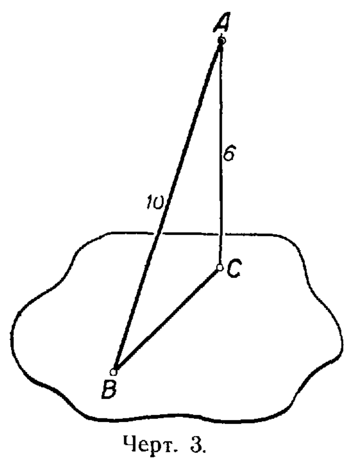
9. Из центра круга проведён перпендикуляр к его плоскости. Определить расстояние от конца этого перпендикуляра до точек

окружности, если длина перпендикуляра равна a, а площадь круга равна Q.

10. Определить геометрическое место точек в пространстве, равноудалённых от всех точек данной окружности или от трёх точек, не лежащих на одной прямой.

11. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро $A_1A = 56$ *см*, а стороны основания: $AB = 33$ *см* и $AD = 40$ *см*. Определить площадь сечения, проведённого через рёбра AD и B_1C_1.



Черт. 3.

13. Точка O — центр квадрата со стороной a; OA — прямая, перпендикулярная к плоскости квадрата и равная b. Найти расстояние от точки A до вершин квадрата.

14. Из точки M, отстоящей от плоскости P на расстоянии $d = 4$, проведены к этой плоскости наклонные MA, MB, MC под углами в 30°, 45°, 60° к прямой MO, перпендикулярной к P. Определить длину наклонных MA, MB и MC.

15. Из некоторой точки M проведены к плоскости P три равные наклонные: $MA = MB = MC = l$. Показать, что точки A, B и C (основания наклонных на плоскости P) лежат на одной окружности, центром которой служит точка O — проекция точки M.

16. Дана плоскость; из некоторой точки пространства проведены к этой плоскости две наклонные длиной в 20 *см* и 15 *см*; проекция первой из них на плоскость равна 16 *см*; найти проекцию второй наклонной.

17. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 6 *см*, и наклонная длиной 9 *см*. Найти проекцию перпендикуляра на наклонную.

18. Сторона равностороннего треугольника равна 3 *см*. Определить расстояние от го плоскости до точки, которая отстоит от каждой из его вершин на 2 *см*.

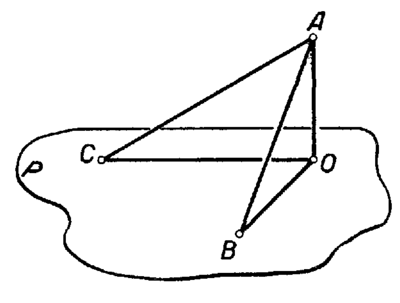
19. 1) Из некоторой точки A (черт. 4) проведены к данной плоскости P перпендикуляр $AO = 1$ *см* и две равные наклонные BA

и AC, которые образуют с перпендикуляром $\angle BAO = \angle CAO = 60°$, а между собой $\angle CAB = 90°$. Найти расстояние BC между основаниями наклонных.

2) Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая 2 *см*; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями — прямой. Найти расстояние данной точки от плоскости.

3) Из некоторой точки проведены к данной плоскости две равные наклонные; угол между ними равен 60°, угол между их проекциями — прямой. Найти угол между каждой наклонной и её проекцией.

20. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4 *см*. Данная точка находится на расстоянии 6 *см* от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найти это расстояние.



Черт. 4.

21. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $b = 6$ *см* и боковой стороной $a = 5$ *см*. К плоскости треугольника в центре O вписанного в него круга проведён перпендикуляр $OK = 2$ *см*. Найти расстояние точки K от сторон треугольника и от вершины B.

22. 1) В треугольнике ABC угол B прямой и катет $BC = a$. Из вершины A проведён к плоскости треугольника перпендикуляр AD так, что расстояние между точками D и C равно f. Определить расстояние от точки D до катета BC.

2) Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 *м* и 20 *м*. Из вершины прямого угла C проведён к плоскости этого треугольника перпендикуляр $CD = 35$ *м*. Найти расстояние от точки D до гипотенузы AB.

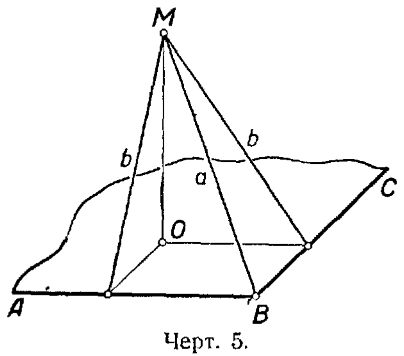
3) Стороны треугольника: 10 *см*, 17 *см* и 21 *см*. Из вершины большего угла этого треугольника проведён перпендикуляр к его плоскости, равный 15 *см*. Определить расстояние от его концов до большей стороны.

23. В треугольнике ABC угол C прямой; CD — перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Точка D соединена с A и B. Определить площадь треугольника ADB, если дано: $CA = 3$ *дм*, $BC = 2$ *дм* и $CD = 1$ *дм*.

24. В вершине A прямоугольника $ABCD$ проведён к его плоскости перпендикуляр AK, конец K которого отстоит от других вершин на расстояние 6 *см*, 7 *см* и 9 *см*. Найти длину перпендикуляра AK.

25. A и B — точки на плоскости M; AC и BD — перпендикуляры к этой плоскости, причём $AC = a$ и $BD = b$. Доказать, что линии AD и BC пересекаются, и определить расстояние от точки их пересечения до плоскости M.

26. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от его вершины B на a, а от каждой из сторон — на b. Чему равно расстояние MO точки M от плоскости прямого угла (черт. 5)?



Черт. 5.

27. На плоскости M даны две параллельные прямые AB и CD, расстояние между которыми равно a. Вне плоскости M дана точка S, удалённая от AB на b и от CD на c. Определить расстояние от точки S до плоскости M, если известно, что 1) $a = 66$, $b = c = 65$; 2) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

28. 1) Если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной будет служить биссектрисой данного угла. Доказать.

2) Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD, образующая со сторонами AB и AC равные острые углы. На какие части проекция прямой AD на плоскость треугольника делит сторону BC, если $AB = 51$ *м*, $AC = 34$ *м* и $BC = 30$ *м*?

§ 2. Угол прямой линии с плоскостью.

1. Рёбра основания прямоугольного параллелепипеда имеют длину 4 *см* и 3 *см*; высота параллелепипеда равна 5 *см*. Найти его диагональ и угол диагонали с плоскостью основания.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол в 45°. Стороны основания равны 120 *см* и 209 *см*. Определить высоту параллелепипеда.

3. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h; апофема наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Найти боковые рёбра.

4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с основанием пирамиды угол в 30°. Найти сторону основания.

5. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

6. Точка отстоит от плоскости на h. Найти длину наклонных, проведённых из неё под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

7. Отрезок длиной 10 *см* пересекает плоскость; концы его находятся на расстоянии 3 *см* и 2 *см* от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

8. Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы его проекция была вдвое меньше самого отрезка?

9. 1) Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой угол в 60°. Определить расстояние между концами наклонных.

2) Из точки, отстоящей от плоскости на a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° и 30°, а между собой прямой угол. Определить расстояние между концами наклонных.

10. Из точки, отстоящей от плоскости на a, проведены две наклонные под углом в 30° к плоскости, причём их проекции составляют между собой угол в 120°. Определить расстояние между концами наклонных.

11. В плоскости M находится прямая AB. Из точки B проведены по одну сторону плоскости перпендикулярные к AB прямые BC и BD, отклонённые от плоскости M на 50° и 15°. Определить угол CBD.

12. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет находится на плоскости M, а другой катет образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с плоскостью M угол в 30°. Доказать это.

13. Если наклонная AB составляет с плоскостью M угол в 45°, а прямая AC, лежащая в плоскости M, составляет угол в 45° с проекцией наклонной AB, то $\angle BAC = 60°$. Доказать это.

14. Если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые рёбра составляют с плоскостью основания угол в 60°. Доказать.

§ 3. Параллельные прямые и плоскости.

Параллельные прямые.

1.* 1) A и B—точки вне плоскости M; AC и BD — перпендикуляры на эту плоскость; $AC = 3$ *м*, $BD = 2$ *м* и $CD = 24$ *дм*. Определить расстояние между точками A и B.

2) На верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удалённых один от другого (по поверхности земли) на 3,4 *м*, упирается концами перекладина. Один из столбов возвышается над землёй на 5,8 *м*, другой — на 3,9 *м*. Определить длину перекладины.

2. 1) Концы данного отрезка длиной в 125 *см* отстоят от плоскости на 100 *см* и 56 *см*. Найти длину его проекции.

2) Телефонная проволока длиной в 15 *м* протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 *м* от поверхности земли, к дому, где её прикрепили на высоте 20 *м*. Определить расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

3. Из точки A плоскости M проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки B и C, причём $AB = 8$ *см* и $AC = 14$ *см*. Точка B удалена от плоскости M на 6 *см*. Найти расстояние точки C от плоскости M.

4. Отрезок длиной в 10 *см* пересекает плоскость; концы его удалены от плоскости на расстояние 5 *см* и 3 *см*. Найти длину проекции отрезка на плоскость.

5. Отрезок пересекает плоскость; концы его отстоят от плоскости на расстояние 8 *см* и 2 *см*. Найти расстояние середины этого отрезка от плоскости.

6. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от неё на 30 *см* и 50 *см*. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : 7? (Два случая.)

7. Правильный треугольник спроектирован на плоскость; вершины его отстоят от плоскости на расстояние 10 *дм*, 15 *дм* и 17 *дм*. Найти расстояние его центра от плоскости проекций.

8. Данный отрезок AB параллелен плоскости и равен a. Отрезок BA_1, соединяющий конец B с проекцией A_1 другого конца, составляет с плоскостью угол в 60°. Определить длину отрезка BA_1.

9. Из точек A и B плоскости M проведены вне её параллельные между собой отрезки: $AC = 8$ *см* и $BD = 6$ *см*. Прямая, проведённая через C и D, пересекает плоскость M (почему?) в точке E. Отрезок $AB = 4$ *см*. Определить расстояние BE.

10. AB — отрезок на плоскости M, равный a, AC и BD — отрезки вне плоскости M, равные b, причём отрезок AC перпендикулярен к плоскости M, а BD, будучи перпендикулярен к AB, составляет с плоскостью M угол в 30°. Определить расстояние CD.

Прямая, параллельная плоскости.

11. 1) Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

2) Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой. Сколько возможно провести таких плоскостей?

3) Даны плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, провести в этой же плоскости прямую, параллельную данной прямой.

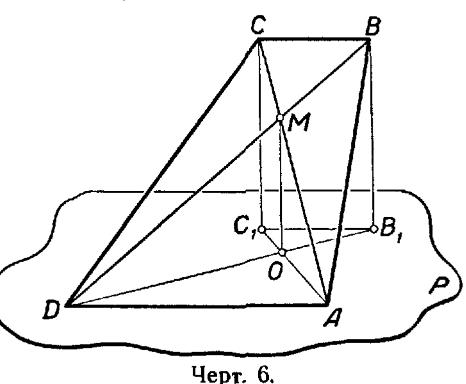
12. Провести через данную точку отрезок a так, чтобы его проекция на данную плоскость была равна самому отрезку.

13. По стороне основания a и боковому ребру b правильной треугольной призмы определить площадь сечения, проведённого через боковое ребро и ось призмы.

14. Из внешней точки A проведён к плоскости M отрезок AB. Он разделён точкой C в отношении $3:4$ (от A к B) и отсюда проведён параллельно плоскости M отрезок $CD = 12$ *см*. Через точку D проведён к плоскости M отрезок ADE. Определить расстояние между точками B и E.

15. BDC — отрезок, параллельный плоскости M; ABE, ADF и ACG — прямые, проведённые из внешней точки A к плоскости M и пересекающие её в точках E, F, G. Определить расстояние между точками E и G, если $BC = a$, $AD = b$ и $DF = c$.

16. AB и CD — параллельные отрезки, лежащие в двух пересекающихся плоскостях; AE и DF — перпендикуляры на линию пересечения плоскостей. Расстояние $AD = 5$ *см* и отрезок $EF = 4$ *см*. Найти расстояние между прямыми AB и CD.



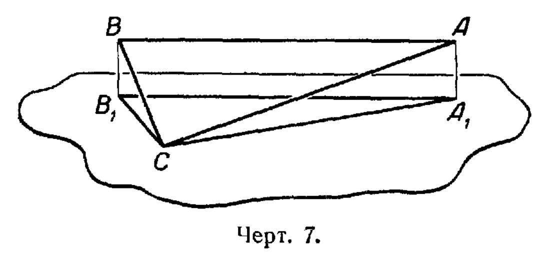
Черт. 6.

17. Основание DA трапеции $ABCD$ (черт. 6) находится на плоскости P, а основание CB отстоит от неё на 5 *см*. Найти расстояние от плоскости P точки M пересечения диагоналей этой трапеции, если $DA:CB = 7:3$.

18. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D находятся на плоскости M, а B и C — вне её. Сторона $AD = 10$ *см*, сторона $AB = 15$ *см*, проекции диагоналей AC и BD на плоскость M соответственно равны 13,5 *см* и 10,5 *см*. Определить диагонали.

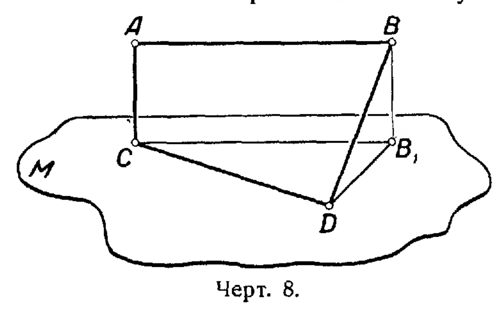
19. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 *см* от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 *см* и 2 *см*. Найти проекции сторон.

20. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость параллельно гипотенузе на расстоянии 1 *дм* от неё (черт. 7). Проекции катетов на эту плоскость равны 3 *дм* и 5 *дм*. Определить проекцию гипотенузы на эту же плоскость.



Черт. 7.

21. AB и CD — две параллельные прямые, лежащие в плоскости M на расстоянии 28 *см* одна от другой; EF — внешняя прямая, параллельная AB и удалённая от AB на 17 *см*, а от плоскости M на 15 *см*. Найти расстояние между EF и CD. (Два случая.)



Черт. 8.

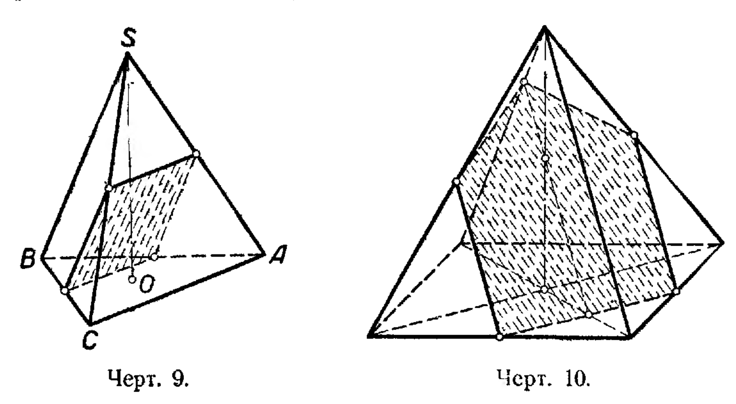
22. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости M, проведены к ней перпендикуляр AC и наклонная $BD \perp AB$. Определить расстояние CD, если $AB = a$, $AC = b$ и $BD = c$ (черт. 8).

23. AB — отрезок, параллельный плоскости M; AC и BD — две равные наклонные к плоскости M, проведённые перпендикулярно к отрезку AB и в разных направлениях от него. Отрезок AB, равный 2 *см*, отстоит от плоскости M на 7 *см*, а отрезки AC и BD содержат по 8 *см*. Определить расстояние CD.

24. В правильной четырёхугольной пирамиде провести плоскость через диагональ основания параллельно боковому

ребру. Сторона основания равна a, а боковое ребро равно b. Определить площадь полученного сечения.

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания a и боковое ребро равно b. Провести в этой пирамиде плоскость через середины рёбер AB и BC параллельно ребру SB. Определить площадь полученного сечения (черт. 9).



Черт. 9. Черт. 10.

26. Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно a. Провести сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты (черт. 10) и найти его площадь.

Параллельные плоскости.

27. Через данную точку провести плоскость параллельную данной плоскости.

28. В кубе с ребром a провести плоскость, которая проходила бы через середины двух смежных сторон верхнего основания и через центр нижнего. Вычислить периметр сечения.

29. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8 *дм*. Отрезок длиной 10 *дм* своими концами упирается в эти плоскости. Определить проекции отрезка на каждую плоскость.

30. 1) Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные: $AC = 37$ *см* и $BD = 125$ *см*. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 *см*. Чему равна проекция наклонной BD?

2) Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны 51 *см* и 53 *см*, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся, как $6 : 7$. Определить расстояние между данными плоскостями.

31. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 4 *м* и наклонная, равная 6 *м*. Расстояния

между их концами в каждой плоскости равны по 3 *м*. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

32. Два отрезка, сумма которых равна c, упираются своими концами в две параллельные плоскости; проекции их a и b. Найти отрезки.

33. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC = 13$ *см*; $BD = 15$ *см*; сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 *см*. Найти длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

34. 1) Два прямых угла в пространстве расположены так, что стороны их соответственно параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны к отрезку, соединяющему их вершины. Длина этого отрезка равна a. На стороне одного угла отложен от его вершины отрезок b, а на непараллельной ей стороне другого угла отложен отрезок c. Определить расстояние между концами этих отрезков.

2) В предыдущей задаче прямые углы заменить углами в 60° и взять: $a = 24$, $b = 5$ и $c = 8$.

35. Вершины равностороннего треугольника со стороной a находятся вне плоскости M на одинаковом от неё расстоянии d. Из центра треугольника проведён перпендикуляр к его плоскости, равный h и направленный в сторону, противоположную плоскости M. Из конца этого перпендикуляра проведены прямые через вершины треугольника до пересечения с плоскостью M. Определить отрезки этих прямых между вершинами треугольника и плоскостью M и расстояния между их концами.

36. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ середины K и L противолежащих рёбер AA_1 и CC_1 соединены отрезками прямых с вершинами куба B и D_1. Найти стороны и диагонали получившегося четырёхугольника $KBLD_1$ и определить вид его. Ребро куба равно a.

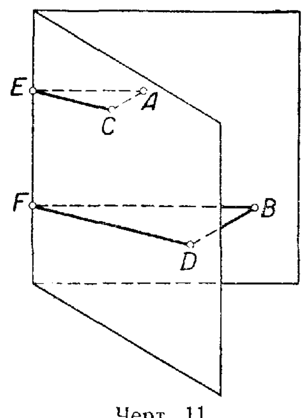
37. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединить по порядку середины следующих рёбер: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Доказать, что полученная фигура есть правильный шестиугольник, и определить её площадь по ребру куба a.

38. 1) Основанием правильной призмы служит шестиугольник со стороной в 3 *дм*; высота призмы равна 13 *дм*. Определить площадь сечения, проведённого через две противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований призмы.

2) Правильная шестиугольная призма, у которой боковые грани — квадраты, пересечена плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.

§ 4. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости.

1. 1) На одной грани двугранного угла даны две точки A и B (черт. 11); из них опущены перпендикуляры на другую грань: $AC = 1$ *дм* и $BD = 2$ *дм*, и на ребро: $AE = 3$ *дм* и BF. Найти BF.



Черт. 11.

2) На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от ребра на 51 *см* и 34 *см*. Расстояние первой точки от другой грани равно 15 *см*. Определить расстояние второй точки.

2. Двугранный угол равен 45°. На одной грани дана точка на расстоянии a от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.

3. Если равнобедренный прямоугольный треугольник ABC перегнуть по высоте BD так, чтобы плоскости ABD и CBD образовали прямой двугранный угол, то линии DA и DC сделаются взаимно перпендикулярными, а BA и BC составят угол в 60°. Доказать.

4. Определить величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.

5. 1) Из точки, взятой внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр на ребро; он образует с гранями углы в 38° 24′ и 71° 36′. Вычислить величину двугранного угла.

2) Точка, взятая внутри двугранного угла в 60°, удалена от обеих граней на a. Найти ее расстояние от ребра.

6. 1) A и B — точки на ребре прямого двугранного угла; AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведённые в разных гранях. Определить расстояние CD, если $AB = 6$ *см*, $AC = 3$ *см* и $BD = 2$ *см*.

2) В предыдущей задаче прямой двугранный угол заменить углом в 120° и взять: a) $AB = AC = BD = a$; b) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

7. Треугольник ABC, прямоугольный при C, опирается катетом AC на плоскость M, образуя с ней двугранный угол в 45°. Катет $AC = 2$ *м*, а гипотенуза AB относится к катету BC, как 3 : 1. Определить расстояние от вершины B до плоскости M.

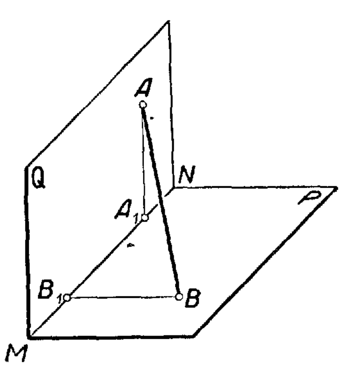
8. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC, у которого две стороны AB и BC содержат по 7 *см*, а третья $AC = 2$ *см*. Через сторону AC проведена

плоскость под углом в 30° к плоскости основания, пересекающая противолежащее боковое ребро в точке D. Определить площадь полученного сечения и отрезок BD бокового ребра.

9. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их отклонены на 60°. Общее основание равно 16 *см*; боковая сторона одного треугольника равна 17 *см*, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Определить расстояние между вершинами треугольников.

10. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 7 *см* и 24 *см*. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

2) Дан треугольник ABC со сторонами: $AB = 9$; $BC = 6$ и $AC = 5$. Через сторону AC проходит плоскость M, составляющая с плоскостью треугольника угол 45°. Найти расстояние между плоскостью M и вершиной B.



Черт. 12.

11. Прямая AB параллельна плоскости M и отстоит от неё на a; через AB проходит плоскость P, образующая с плоскостью M угол в 45°; в плоскости P проведена прямая линия под углом 45° к AB. Определить её отрезок между AB и плоскостью M.

12. AB и CD — параллельные прямые, лежащие на двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на 8 *см* и 6,3 *см*. Найти расстояние между AB и CD.

13. Отрезок AB упирается своими концами в грани прямого двугранного угла $PMNQ$ (черт. 12); концы отрезка находятся на одинаковых расстояниях от ребра MN двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонён к граням.

14. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных к данной плоскости и пересекающих прямую, данную на той же плоскости.

15. 1) Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости.

2) Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести?

16. AB — прямая пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей M и P; CD — отрезок в плоскости M, проведённый параллельно AB на расстоянии 60 *см* от нее; E — точка в плоскости P на расстоянии 91 *см* от AB. Найти расстояние от E до CD.

17. 1) Отрезок AB соединяет точки A и B, лежащие на двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на линию пересечения плоскостей, соответственно равны a и b, а расстояние между их основаниями равно c. Определить длину отрезка AB и длину его проекций на данные плоскости.

2) Данный отрезок имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°; длина этого отрезка равна a. Определить часть линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на неё из концов данного отрезка.

18. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 8 *дм*, сторона основания равна 4 *дм*. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найти площадь сечения.

19. В правильной четырёхугольной пирамиде провести плоскость через сторону основания перпендикулярно к противолежащей боковой грани. Сторона основания $a = 30$ *см*, а высота пирамиды $h = 20$ *см*. Определить площадь полученного сечения.

§ 5. Многогранные углы.

1. a) Можно ли составить трёхгранный угол с такими плоскими углами: 1) 130°, 85° и 36°; 2) 100°, 70° и 40°; 3) 160°, 130° и 80°; 4) 82°, 56° и 26°; 5) 150°, 120° и 90°?

b) Можно ли составить выпуклый четырёхгранный угол из таких плоских углов: 1) 40°, 70°, 100° и 150°; 2) 150°, 30°, 70° и 40°; 3) 130°, 50°, 30° и 70°?

2. Если в правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°, то противолежащие боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Доказать.

3. Из общей внешней точки проведены к плоскости две наклонные, из которых одна составляет с плоскостью угол в 70°, а другая — в 15°. Чему может быть равен угол между этими наклонными?

4. Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60°; на одном из рёбер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из

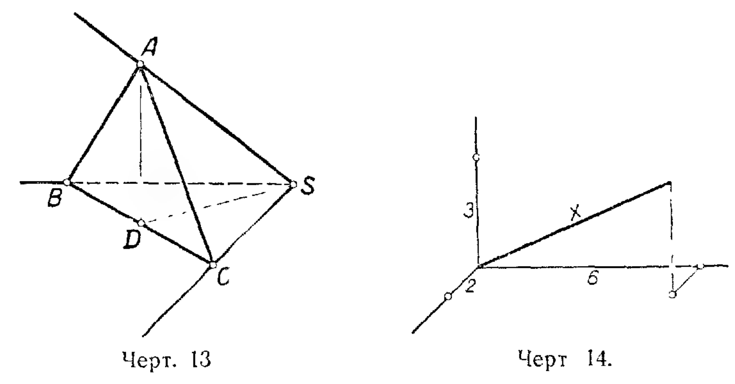
конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину перпендикуляра.

5. В трёхгранном углу $SABC$ дано: $\angle BSC = 90°$, $\angle ASB = \angle ASC = 60°$ и $SA = a$. Требуется:

1) найти расстояние от точки A до плоскости BSC;

2) доказать, что ребро SA составляет с плоскостью BSC угол в $45°$.

6. Если в трёхгранном углу (черт. 13) один плоский угол BSC прямой, а два другие угла ASB и ASC содержат по $60°$, то плоскость BAC, отсекающая от рёбер три равных отрезка, перпендикулярна к плоскости прямого угла. Доказать.



Черт. 13 Черт 14.

7. В трёхгранном углу два плоских угла по $45°$, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

8. В трёхгранном углу два плоских угла по $45°$; третий плоский угол $60°$. Найти двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

9. В трёхгранном углу два плоских угла по $60°$, третий прямой. Найти угол между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром.

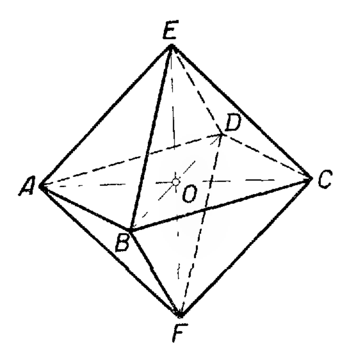
10. В трёхгранном углу рёбра взаимно перпендикулярны. Внутри него из вершины проведён отрезок, проекция которого на каждое из рёбер равна 1. Найти его проекции на грани. Сделать чертёж.

11. В трёхгранном углу все плоские углы прямые. Внутри него дана точка на расстоянии 1 *дм*, 2 *дм* и 2 *дм* от его граней. Найти расстояние данной точки от вершины угла.

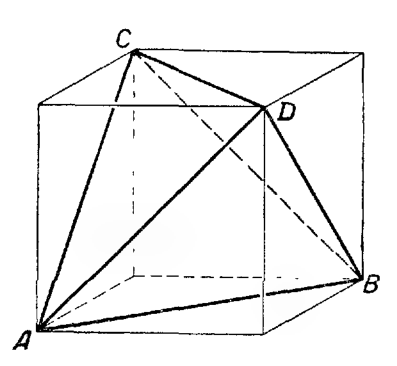
12. В трёхгранном углу все плоские углы прямые. Внутри него из вершины проведён отрезок x, проекции которого на рёбра 2 *см*, 3 *см* и 6 *см*. Найти длину этого отрезка (черт. 14).

§ 6. Правильные многогранники.

1. Ребро правильного октаэдра $a = 1$ *м* (черт. 15). Определить расстояние EF между двумя противолежащими вершинами октаэдра (ось октаэдра).



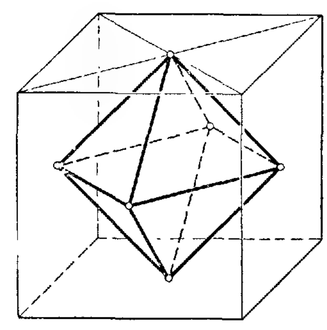
Черт. 15.



Черт. 16.

2. В кубе (черт. 16) из одной вершины (D) проведены диагонали граней DA, DB и DC, и концы их соединены прямыми. Доказать, что многогранник $DABC$, образованный четырьмя плоскостями, проходящими через эти прямые, — правильный тетраэдр.

3. Ребро куба равно a. Вычислить поверхность вписанного в него правильного октаэдра (черт. 17). Найти её отношение к поверхности вписанного в тот же куб правильного тетраэдра.


Черт. 17.

4. 1) Сколько плоскостей симметрии можно провести через одну вершину правильного тетраэдра?

2) Сколько плоскостей симметрии вообще можно провести в правильном тетраэдре?

5. Соединить прямыми центры каждых двух смежных граней правильного октаэдра и через смежные прямые провести плоскости. Доказать, что полученный таким образом шестигранник — куб, и вычислить его поверхность, если ребро октаэдра равно a.

6. 1) Ребро правильного октаэдра равно a; найти расстояние между центрами двух соседних граней.

2) Ребро правильного октаэдра равно 3; найти расстояние между противолежащими параллельными гранями.

7. В правильный тетраэдр вписана правильная треугольная призма с равными рёбрами так, что вершины одного её основания находятся на боковых рёбрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить ребро призмы.

8. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на рёбрах октаэдра. Ребро октаэдра равно a. Определить ребро куба.

§ 7. Параллелепипеды и призмы.

Диагонали параллелепипеда.

1. Определить диагонали прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: 1) 1; 2; 2; 2) 2; 3; 6; 3) 6; 6; 7; 4) 8; 9; 12; 5) 12; 16; 21.

2. 1) Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 *м*, стороны основания равны 6 *м* и 8 *м*, и одна из диагоналей основания равна 12 *м*. Определить диагонали параллелепипеда.

2) В предыдущей задаче заменить данные числа по порядку следующими: 9 *см*, 7 *см*, 11 *см* и 14 *см*.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 *см* и 5 *см*, а одна из диагоналей основания 4 *см*. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60°. Определить диагонали параллелепипеда.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 *см* и 5 *см*; расстояние между меньшими из них 4 *см*; боковое ребро равно $2\sqrt{2}$ *см*. Определить диагонали параллелепипеда.

5. Определить диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

6. 1) В прямом параллелепипеде стороны основания длиной в 3 *см* и 4 *см* составляют угол в 60°, а боковое ребро есть средняя пропорциональная между сторонами основания. Определить диагонали этого параллелепипеда.

2) В прямом параллелепипеде рёбра, выходящие из одной вершины, равны 1 *м*, 2 *м* и 3 *м*, причём два меньших образуют угол в 60°. Определить диагонали этого параллелепипеда.

7. Ребро куба равно a. Определить расстояние от вершины куба до его диагонали.

8. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние от диагонали до непересекающего её ребра.

9. Доказать, что во всяком параллелепипеде сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех рёбер.

Сечения параллелепипеда.

10. 1) В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 *дм* и 24 *дм*, а высота параллелепипеда равна 8 *дм*. Определить площадь диагонального сечения.

2) В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 5 *см*, площадь диагонального сечения 205 $см^2$ и площадь основания 360 $см^2$. Определить стороны основания.

11. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 *м*, стороны основания равны 23 *дм* и 11 *дм*, а диагонали основания относятся, как 2 : 3. Определить площади диагональных сечений.

12. В прямом параллелепипеде стороны основания 17 *см* и 28 *см*; одна из диагоналей основания равна 25 *см*; сумма площадей диагональных сечений относится к площади основания, как 16 : 15. Определить площади диагональных сечений.

13. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ дано: $AB = 29$ *см*, $AD = 36$ *см*, $BD = 25$ *см* и боковое ребро равно 48 *см*. Определить площадь сечения AB_1C_1D.

14. В прямом параллелепипеде острый угол основания содержит α°; одна из сторон основания равна a; сечение, проведённое через эту сторону и противоположное ей ребро, имеет площадь Q и образует с плоскостью основания угол $90^\circ - \alpha^\circ$. Определить другую сторону основания.

15. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD = 60^\circ$; боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом в 60°, и плоскость AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости основания. Доказать, что площади сечений BB_1D_1D и AA_1C_1C относятся, как 2 : 3.

Призмы.

16. (*Устно.*) Сколько диагоналей можно провести в четырёхугольной призме? в пятиугольной? в треугольной? в n-угольной?

17. (*Устно.*) Сколько плоских углов в пятиугольной призме? сколько двугранных? сколько трёхгранных?

18. (*Устно.*) 1) Какие фигуры представляют собой диагональные сечения параллелепипеда? 2) Сколько диагональных сечений можно провести в пятиугольной призме через одно её ребро? 3) На сколько частей эти плоскости (вопрос 2) делят данную призму? 4) Какое тело представляет каждая из этих частей (вопросы 2 и 3)?

19. (*Устно.*) Сколько диагональных сечений можно провести в n-угольной призме через все её боковые рёбра?

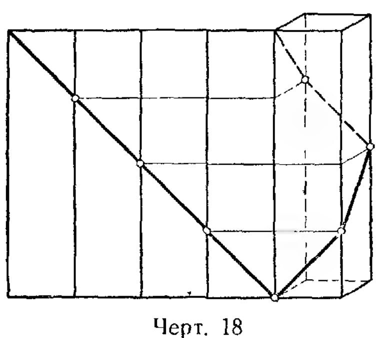
Правильная призма.

20. 1) В правильной четырёхугольной призме площадь основания равна 144 *см*², а высота равна 14 *см*. Определить диагональ этой призмы.

2) Определить диагональ правильной четырёхугольной призмы, если диагональ основания равна 8 *см*, а диагональ боковой грани равна 7 *см*.

21. Если в правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны, то диагонали A_1C и B_1D образуют угол в 60°. Доказать.

22. В правильной четырёхугольной призме площадь боковой грани равна Q. Определить площадь диагонального сечения.



Черт. 18

23. Основанием призмы служит правильный шестиугольник со стороной a; боковые грани — квадраты. Определить диагонали этой призмы и площади её диагональных сечений.

24. Внутри правильной шестиугольной призмы, у которой боковые грани — квадраты, провести плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.

25. Каждое ребро правильной треугольной призмы $a = 3$ *м*. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

26. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 15; высота равна 20. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей её диагонали призмы.

27. Квадрат с проведённой в нём диагональю свёрнут в виде боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы, и, таким образом, диагональ квадрата обратилась в ломаную линию (не плоскую). Определить угол между смежными её отрезками (черт. 18).

Прямая призма.

28. В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и отклонённая от плоскости основания на 45°. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

29. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 *см*, 17 *см* и 21 *см*, а высота призмы 18 *см*. Определить

площадь сечения, проведённого через боковое ребро и меньшую высоту основания.

30. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 *см* и 5 *см*; высота 2 *см*. Найти сторону основания.

Наклонная призма.

31. Боковое ребро $l = 15$ *см* наклонной призмы наклонено к плоскости основания под углом $\alpha = 30°$. Определить высоту призмы.

32. В треугольной призме (наклонной) из двугранных углов между боковыми гранями два содержат: 20° 43′ 28″ и 105° 27′ 32″. Чему равен третий угол?

33. В треугольной призме (наклонной) расстояния между боковыми рёбрами 37 *см*, 13 *см* и 47 *см*. Найти расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

§ 8. Поверхность параллелепипеда и призмы.

Куб и прямоугольный параллелепипед.

1. (*Устно.*) Поверхность куба равна 24 $м^2$. Найти его ребро.

2. a) Определить ребро куба, если его поверхность равна: 1) 5046 $см^2$; 2) $793\frac{1}{2}$ $дм^2$; 3) 47 $м^2$.

b) Определить поверхность куба: 1) по его диагонали l; 2) по данной площади Q его диагонального сечения.

3. 1) Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трём его измерениям: $a = 10$ *см*, $b = 22$ *см* и $c = 16$ *см*.

2) Рёбра прямоугольного параллелепипеда относятся, как 3 : 7 : 8, а поверхность содержит 808 $см^2$. Определить рёбра.

4. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся, как 7 : 24, а площадь диагонального сечения равна 50 $дм^2$. Определить боковую поверхность.

5. Определить боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q и площадь диагонального сечения M.

Прямой параллелепипед.

6. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 *м* и 8 *м* и образуют угол в 30°; боковое ребро равно 5 *м*. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

7. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 *см* и 17 *см*; одна из диагоналей основания равна 21 *см*; бо́льшая диагональ параллелепипеда равна 29 *см*. Определить полную поверхность параллелепипеда.

8. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 *см* и 8 *см*; угол между ними содержит 60°. Боковая поверхность

параллелепипеда равна 220 $см^2$. Определить полную поверхность и площадь меньшего диагонального сечения.

9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями в 6 *см* и 8 *см*; диагональ боковой грани равна 13 *см*. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

10. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, а площади диагональных сечений M и N. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

Правильная призма.

11. (*Устно.*) В прямой треугольной призме все рёбра равны. Боковая поверхность равна 12 $м^2$. Найти высоту.

12. (*Устно.*) Боковая поверхность правильной четырёхугольной призмы равна 32 $м^2$, а полная поверхность 40 $м^2$. Найти высоту.

13. По стороне основания a и боковому ребру b определить полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

14. Определить полную поверхность правильной четырёхугольной призмы, если её диагональ равна 14 *см*, а диагональ боковой грани равна 10 *см*.

15. Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 9 *см*, а полная поверхность ее равна 144 $см^2$. Определить сторону основания и боковое ребро.

16. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол в 45°. Сторона основания l. Определить боковую поверхность призмы.

Прямая призма.

17. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если её высота равна 50 *см*, а стороны основания: 40 *см*, 13 *см*, 37 *см*.

18. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25 *дм*, 29 *дм* и 36 *дм*, а полная поверхность содержит 1620 $дм^2$. Определить боковую поверхность и высоту призмы.

19. В прямой треугольной призме стороны основания относятся, как 17 : 10 : 9, а боковое ребро равно 16 *см*; полная поверхность этой призмы содержит 1440 $см^2$. Определить стороны основания.

20. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона относится к основанию, как 5 : 6. Высота призмы равна высоте основания, опущенной на его боковую сторону; полная поверхность содержит 2520 $м^2$. Определить рёбра призмы.

21. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$ со сторонами $AB = CD = 13$ *см*, $BC = 11$ *см* и $AD = 21$ *см*; площадь её диагонального сечения равна 180 *см*^{2}. Определить полную поверхность этой призмы и площадь сечения AB_1C_1D.

22. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1 *м*^{2}. Найти боковую поверхность.

23. Основанием прямой призмы служит правильный десятиугольник, вписанный в круг радиуса R. Боковое ребро призмы равно диагонали основания, проведённой из первой вершины к четвертой. Определить боковую поверхность этой призмы.

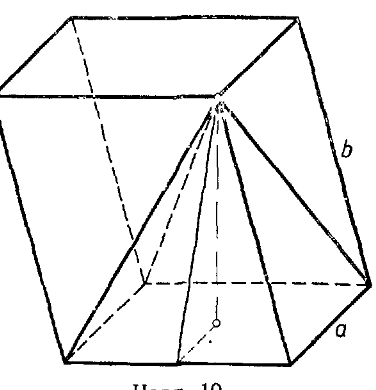
Наклонные призмы и параллелепипеды.

24. (*Устно.*) Расстояния между боковыми рёбрами наклонной треугольной призмы: 2 *см*, 3 *см* и 4 *см*; боковая поверхность равна 45 *см*^{2}. Найти боковое ребро.

25. 1) В наклонной четырёхугольной призме боковое ребро равно 8 *см*, а расстояния между последовательными боковыми рёбрами: 3 *см*, 6 *см*, 2 *см* и 7 *см*. Определить её боковую поверхность.

2) В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны; их общее ребро равно 24 *см* и отстоит от двух других боковых рёбер на 12 *см* и 35 *см*. Определить боковую поверхность этой призмы.

26. 1) В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми рёбрами равны 37 *см*, 15 *см* и 26 *см*, а боковая поверхность равновелика перпендикулярному сечению. Определить боковое ребро.



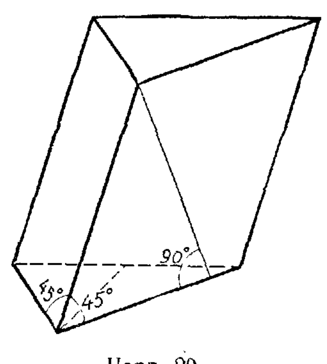
Черт. 19.

2) В наклонной треугольной призме боковые рёбра содержат по 8 *см*; стороны перпендикулярного сечения относятся, как 9 : 10 : 17, а его площадь равна 144 *см*^{2}. Определить боковую поверхность этой призмы.

27. 1) Основанием параллелепипеда служит квадрат; одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания. Сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Определить полную поверхность этого параллелепипеда (черт. 19).

2) В том же параллелепипеде определить диагонали и площади диагональных сечений.

28. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a; длина бокового ребра равна b; одно из боковых рёбер образует с прилежащими сторонами основания углы в 45°. Определить боковую поверхность этой призмы (черт. 20).



Черт. 20.

29. Основанием наклонной призмы служит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 10$ *см* и $BC = 12$ *см*; вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C и ребро $AA_1 = 13$ *см*. Определить полную поверхность этой призмы.

§ 9. Пирамида.

1. По данной стороне основания a и боковому ребру b определить высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

2. По данной стороне основания a и высоте h определить апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

3. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 7 *см*, а сторона основания равна 8 *см*. Определить боковое ребро.

4. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 3 *см* и 7 *см*, а одна из диагоналей 6 *см*; высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4 *см*. Определить боковые рёбра пирамиды.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 *см* и высота 9 *см*; боковые рёбра равны между собой, и каждое содержит 13 *см*. Определить высоту этой пирамиды.

6. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 *см*, а боковая сторона 10 *см*. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить высоту этой пирамиды.

7. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 *см* и 8 *см*; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 *см*. Вычислить высоту пирамиды.

8. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых рёбрах пирамиды, а остальные четыре находятся в плоскости её основания. Определить ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h.

Сечения пирамиды.

9. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 14 *см*, а длина бокового ребра 10 *см*. Определить площадь диагонального сечения.

10. В правильной шестиугольной пирамиде высота равна h, а сторона основания a. Определить площади диагональных сечений.

11. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и боковому ребру b определить площадь сечения, проведённого через боковое ребро и высоту пирамиды.

12. (*Устно.*) В пирамиде проведено сечение параллельно основанию через середину высоты. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

13. Высота пирамиды разделена на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 кв. ед. Определить площади полученных сечений.

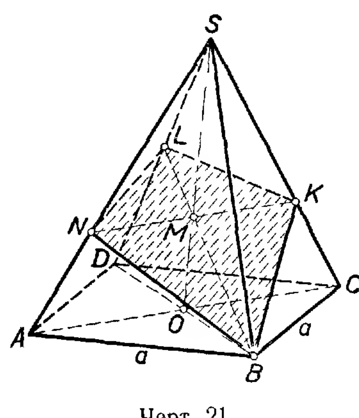
14. Высота правильной пирамиды разделена на n равных частей, и через точки деления проведены сечения, параллельные основанию. Площадь основания Q. Найти площади сечений ($Q = 400$, $n = 5$).

15. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 3 : 4 (от вершины к основанию), а площадь сечения меньше площади основания на 200 *см*². Определить площадь основания.

16. На каком расстоянии от вершины пирамиды с высотой h надо провести сечение параллельно основанию, чтобы площадь сечения равнялась: 1) половине площади основания; 2) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ и вообще $\frac{1}{n}$ площади основания?

17. 1) Высота пирамиды равна 16 *м*; площадь основания равна 512 *м*². На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 *м*²?

2) В пирамиде площадь основания равна 150 *см*², площадь параллельного сечения 54 *см*², расстояние между ними равно 14 *см*. Определить высоту пирамиды.



Черт. 21.

18. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащему боковому ребру. Определить площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, а высота пирамиды h ($a = 1$; $h = 4$).

19. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой угол в 30°. Построить сечение, проходящее через вершину основания перпендикулярно к противоположному ребру, и найти его площадь (черт. 21).

§ 10. Поверхность пирамиды.

Правильные пирамиды.

1. По стороне основания a и высоте h определить полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

2. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если её высота равна 4 *см*, а апофема 8 *см*.

3. Определить полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если апофема пирамиды равна k и апофема основания r.

4. Определить высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 $м^2$, а полная поверхность 18 $м^2$. Определить сторону основания и высоту пирамиды.

6. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 45°.

7. По стороне основания a определить боковую поверхность правильной четырёхугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

8. Определить сторону основания правильной четырёхугольной пирамиды по её высоте h и боковой поверхности P.

9. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если её боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 *см* и 144 *см*^{2}.

10. В правильной четырёхугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 *см*, а полная поверхность 16 *см*^{2}.

11. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая грань равновелика диагональному сечению, проведённому через диаметр основания.

12. Определить боковую поверхность правильной десятиугольной пирамиды, если радиус основания пирамиды равен R, а высота пирамиды более радиуса основания на половину стороны основания.

13. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Определить её боковую поверхность по данному ребру куба a.

Неправильные пирамиды.

14. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями в 6 *м* и 8 *м*; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1 *м*. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

15. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 20 *см* и 36 *см*, а площадь равна 360 *см*^{2}, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 *см*. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

16. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 5 *м* и 4 *м*, а одна из диагоналей 3 *м*; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 *м*. Определить полную поверхность этой пирамиды.

17. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого одна сторона содержит 40 *см*, а две другие по 25 *см*. Высота пирамиды проходит через вершину угла, образуемого равными сторонами основания, и равна 8 *см*. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

18. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами: 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 *см*. Определить полную поверхность этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза $AB = 26$ *см* и катет $AC = 24$ *см*; ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC и равно 18 *см*. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

20. Основанием пирамиды служит квадрат, её высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 *дм*, а высота равна 21 *дм*.

21. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной a; одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания и равно стороне основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

22. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

§ 11. Усечённая пирамида.

1. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 7 *см*. Стороны оснований 10 *см* и 2 *см*. Определить боковое ребро пирамиды.

2. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды 4 *дм* и 1 *дм*. Боковое ребро 2 *дм*. Найти высоту.

3. Определить высоту правильных усечённых пирамид: треугольной, четырёхугольной, шестиугольной, если даны боковое ребро c и стороны a и b нижнего и верхнего оснований.

4. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 63 *см*, апофема равна 65 *см*, а стороны оснований относятся, как 7 : 3. Определить эти стороны.

5. (*Устно.*) Сколько диагоналей можно провести в усечённой пятиугольной пирамиде? в усечённой n-угольной пирамиде?

6. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 2 *см*, а стороны оснований 3 *см* и 5 *см*. Определить диагональ этой усечённой пирамиды.

7. Определить стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если её высота равна 7 *см*, боковое ребро 9 *см* и диагональ 11 *см*.

8. Диагонали AC_1 и A_1C правильной четырёхугольной усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны; каждая из них равна 2. Найти высоту.

9. Диагонали данной правильной четырёхугольной усечённой пирамиды перпендикулярны к боковым рёбрам; сторона нижнего основания равна 9 *см* и боковое ребро равно 8 *см*. Определить сторону верхнего основания, высоту усечённой пирамиды и расстояние от точки пересечения её диагоналей до плоскости нижнего основания.

10. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде сторона большего основания *a*, сторона меньшего *b*. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Найти боковое ребро.

11. Стороны основания правильной треугольной усечённой пирамиды 2 *см* и 6 *см*. Боковая грань образует с бо́льшим основанием угол в 60°. Найти высоту.

Сечения.

12. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 4. Стороны оснований 2 и 8. Найти площади диагональных сечений.

13. В правильной усечённой треугольной пирамиде сторона большего основания *a*, сторона меньшего *b*. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Провести сечение через боковое ребро и ось и найти его площадь.

14. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 4 *см*, диагональ 5 *см*. Найти площадь диагонального сечения.

15. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде площади оснований *Q* и *q*, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 45°. Определить площадь диагонального сечения.

16. В правильной треугольной усечённой пирамиде стороны оснований равны 8 *м* и 5 *м*, а высота 3 *м*. Провести сечение через сторону нижнего основания и противоположную ей вершину верхнего основания. Определить площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

17. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны оснований равны 6 *см* и 8 *см*, а боковое ребро 10 *см*. Провести сечение через конец диагонали меньшего основания перпендикулярно к этой диагонали и определить его площадь.

18. Соответственные стороны оснований усечённой пирамиды относятся, как 13 : 17, а периметр среднего сечения равен 45 *м*. Определить периметры оснований.

19. Площади оснований усечённой пирамиды 9 *см*^{2} и 25 *см*^{2}. Найти площадь среднего сечения.

20. Пусть будет в какой-нибудь усечённой пирамиде Q_1 и Q_2 — площади оснований и M — площадь её среднего сечения. Доказать, что $\sqrt{M}=\frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$.

21. Даны площади оснований усечённой пирамиды: 2 *м*² и 98 *м*². Определить площадь параллельного сечения, проведённого через середину высоты.

22. Высота усечённой пирамиды равна h, а площади оснований Q и q. На каком расстоянии от верхнего основания находится параллельное ему сечение, площадь которого есть средняя пропорциональная между площадями оснований?

23. Основания усечённой пирамиды содержат 18 *м*² и 128 *м*². Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту в отношении 2 : 3 (начиная от меньшего основания).

24. Высота усечённой пирамиды разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Определить площади полученных сечений, если площади оснований Q и q ($Q=32$; $q=2$).

§ 12. Поверхность усечённой пирамиды.

1. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны оснований 8 *м* и 2 *м*. Высота равна 4 *м*. Найти полную поверхность.

2. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды 6 *дм* и 12 *дм*; высота равна 1 *дм*. Найти боковую поверхность.

3. Стороны оснований правильной шестиугольной усечённой пирамиды 4 *см* и 2 *см*; высота 1 *см*. Найти боковую поверхность.

4. Определить полную поверхность правильной усечённой пирамиды: 1) треугольной, 2) четырёхугольной, 3) шестиугольной, если даны высота h и стороны оснований a и b ($a > b$).

5. Определить высоту правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, если стороны её оснований a и b, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

6. 1) В правильной четырёхугольний усечённой пирамиде апофема равна 12 *см*, боковое ребро равно 13 *см* и боковая поверхность 720 *см*². Определить стороны оснований.

2) В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 12 *см*, разность сторон оснований 10 *см*, и полная поверхность равна 512 *см*². Определить стороны оснований.

7. В правильной треугольной усечённой пирамиде двугранный угол при основании равен 60°, сторона этого основания a и полная поверхность S. Определить сторону другого основания.

8. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде площади оснований Q и q, а боковая поверхность P. Определить площадь диагонального сечения.

9. Основаниями усечённой пирамиды служат правильные треугольники со сторонами a и b; одно из боковых рёбер, равное c, перпендикулярно к плоскости основания. Определить боковую поверхность этой усечённой пирамиды ($a=5$; $b=3$; $c=1$).

10. Основаниями усечённой пирамиды служат прямоугольники, причём точки пересечения диагоналей оснований находятся на одном перпендикуляре к плоскости основания. Стороны одного прямоугольника равны 54 *см* и 30 *см*; периметр другого прямоугольника 112 *см*; расстояние между их плоскостями равно 12 *см*. Определить боковую поверхность этой усечённой пирамиды.

11. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде построить внутреннюю пирамиду, принимая за её основание верхний квадрат, а за вершину — центр нижнего квадрата. Стороны квадратов: нижнего a, верхнего b. Чему равна высота пирамид (данной усечённой и внутренней полной), если их боковые поверхности равновелики? (Указать, при каком условии задача имеет решение.)

12. В усечённой пирамиде сходственные стороны оснований относятся, как 3 : 11. В каком отношении её боковая поверхность делится средним сечением?

§ 13. Цилиндр (прямой круговой).

1. (*Устно.*) Радиус основания цилиндра 2 *м*, высота 3 *м*. Найти диагональ осевого сечения.

2. (*Устно.*) Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найти площадь основания.

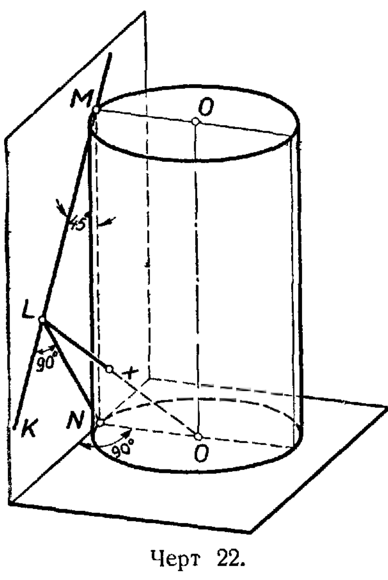
3. (*Устно.*) Высота цилиндра 6 *см*, радиус основания 5 *см*. Найти площадь сечения, проведённого параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 *см* от неё.

4. (*Устно.*) Высота цилиндра 8 *дм*, радиус основания 5 *дм*. Цилиндр этот пересечён плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние этого сечения от оси.

5. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси $h=10$ *см*; её расстояние от секущей плоскости $a=2$ *см*. Определить площадь сечения.

6. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi : 4$. Найти угол между диагоналями осевого сечения.

7. Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра (в осевом сечении — квадрат) равна a. Найти объём правильной вписанной в этот цилиндр восьмиугольной призмы.



Черт 22.

8. Высота цилиндра 6 *дм*, радиус основания 5 *дм*. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований; длина его 10 *дм*. Найти его кратчайшее расстояние от оси.

9. Высота цилиндра 2 *м*, радиус основания 7 *м*. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найти сторону квадрата.

10. Через верхний конец образующей цилиндра под углом в 45° к ней проведена касательная к цилиндру. Радиус основания цилиндра 1 *м*, высота 4 *м*. Определить расстояние касательной от центра каждого основания (черт. 22).

Поверхность цилиндра.

11. Цилиндрический паровой котёл имеет 0,7 *м* в диаметре; длина его равна 3,8 *м*. Как велико давление пара на полную поверхность котла, если на 1 $см^2$ пар давит с силой в 10 *кг*?

12. Высота цилиндра на 10 *см* больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π $см^2$. Определить радиус основания и высоту.

13. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром в 65 *см* имеет высоту в 18 *м*. Сколько квадратных метров жести нужно для её изготовления, если на заклёпку уходит 10% всего требующегося количества жести?

14. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 *м* длины и 5,8 *м* в диаметре. Определить полную поверхность подвала.

15. При паровом отоплении низкого давления количество тепла, которое даёт 1 $м^2$ поверхности нагрева, принимается равным 550 тепловым единицам в час. Сколько погонных метров труб диаметром в 34 *мм* нужно установить в помещении, для отопления которого по расчётам требуется 4500 единиц тепла в час?

16. (*Устно.*) Стороны прямоугольника a и b. Найти боковую поверхность цилиндра, полученного от вращения этого прямоугольника вокруг стороны, равной a.

17. (*Устно.*) Диаметр основания цилиндра равен 1; высота равна окружности основания. Найти $S_{бок}$.

18. (*Устно.*) Высота равностороннего цилиндра равна h. Найти боковую поверхность.

19. (*Устно.*) Радиус основания цилиндра равен R; боковая поверхность равна сумме площадей оснований. Найти высоту.

20. (*Устно.*) Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти боковую поверхность.

21. 1) Чему равно отношение боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения?

2) Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы его боковая поверхность была в три раза больше площади основания?

22. Определить полную поверхность равностороннего цилиндра, если боковая поверхность $P = 50$ *см*^{2} $\left(\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\right)$.

23. 1) В цилиндре радиус основания $r = 2$ *см*, а высота $h = 7$ *см*. Определить радиус круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

2) Найти зависимость между высотой цилиндра и радиусом его основания, если их сумма служит радиусом круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

24. 1) Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром в 25 *см* и высотой в 50 *см*. Предполагая, что при штамповке площадь листа не изменилась, определить диаметр листа.

2) К цилиндрическому стакану (см. предыдущую задачу) выштампована крышка диаметром в 25,2 *см* и высотой 0,5 *см*. Найти диаметр круглого листа, из которого выштампована крышка.

25. В цилиндре площадь основания равна Q и площадь осевого сечения M. Определить полную поверхность этого цилиндра.

26. 1) Какая должна быть зависимость между высотой и радиусом основания, чтобы боковая поверхность цилиндра была равновелика кругу, описанному около его осевого сечения?

2) Такая же задача для полной поверхности.

27. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найти отношение боковых поверхностей цилиндра и призмы.

28. В данном цилиндре проведена плоскость, параллельная основанию, так, что площадь полученного сечения есть средняя пропорциональная между частями боковой поверхности цилиндра.

Определить положение секущей плоскости (зная радиус основания R и высоту H цилиндра). Указать условие, при котором задача имеет решение.

29. Определить полную поверхность цилиндра, описанного около куба с ребром a (вершины куба находятся на окружностях оснований цилиндра).

30. Около правильного октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре — на боковой поверхности его. Ребро октаэдра $a = 10$ *см*. Найти боковую поверхность цилиндра.

§ 14. Конус (прямой круговой).

1. (*Устно.*) Радиус основания конуса 3 *м*, высота 4 *м*. Найти образующую.

2. (*Устно.*) Образующая конуса L наклонена к плоскости основания под углом в 30°. Найти высоту.

3. (*Устно.*) Радиус основания конуса R. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найти его площадь.

4. Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найти угол наклона образующей к основанию.

5. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

6. 1) Радиус основания конуса R. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

2) Радиус основания конуса R. Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении $m : n$ (от вершины к основанию).

7. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найти площадь сечения, проведённого через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

8. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания R. Найти площадь сечения, проведённого через две образующие, угол между которыми равен 30°.

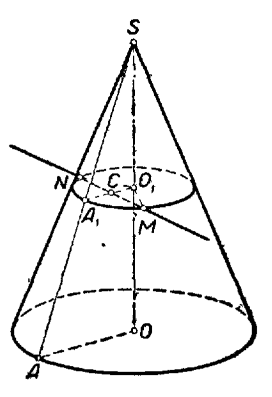
9. Высота конуса H. Угол между высотой и образующей равен 60°. Найти площадь сечения, проведённого через две взаимно перпендикулярные образующие.

10. 1) В конусе, у которого высота равна радиусу основания R, проведена через вершину плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Определить площадь полученного сечения.

2) Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 *см*. Определить площадь сечения.

11. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найти длину отрезка прямой, заключённой внутри конуса.

12. Образующая конуса 13 *см*, высота 12 *см*. Конус этот пересечён прямой MN, параллельной основанию; расстояние её от основания равно 6 *см*, а от высоты 2 *см*. Найти отрезок этой прямой, заключённый внутри конуса (черт. 23).



Черт. 23.

13. В конусе даны радиус основания R и высота H. Определить ребро вписанного в него куба.

14. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Определить ребро этой призмы.

Поверхность конуса.

15. (*Устно*.) Высота конуса $h = 6$, радиус основания $r = 8$. Найти боковую поверхность.

16. (*Устно*.) Высота конуса $h = 4$, образующая $a = 5$. Найти полную поверхность.

17. Конусообразная палатка высотой в 3,5 *м* и с диаметром основания в 4 *м* покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

18. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 *м*. Диаметр башни 6 *м*. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет размеры $0{,}7 \times 1{,}4$ (*м*^{2}) и на швы пошло 10% требующегося железа?

19. Поверхность конического шпица башни равна 250 *м*^{2}, диаметр основания 9 *м*. Найти высоту шпица.

20. 1) Определить величину поверхности, полученной вращением хорды около диаметра, выходящего из её конца, если диаметр равен 25 *см*, а хорда равна 20 *см*.

2) Из точки A на окружности радиуса $r = 7$ *м* проведена касательная $AB = l = 24$ *м*, а из её конца B — секущая BOC через центр. Определить величину поверхности, которую описывает отрезок BC секущей, вращаясь вокруг касательной.

21. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Определить стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 *см*, а полная поверхность тела вращения равна 60π *см*^{2}.

22. Наибольший угол между образующими конуса равен 60° Найти отношение боковой поверхности к площади основания конуса

23. 1) Как относятся между собой площадь основания, боковая поверхность и полная поверхность в равностороннем конусе?

2) По высоте H равностороннего конуса определить его полную поверхность.

24. Как относится боковая поверхность равностороннего конуса к боковой поверхности равностороннего цилиндра, имеющего такую же высоту?

25. Найти зависимость между образующей и радиусом основания конуса, у которого боковая поверхность есть средняя пропорциональная между площадью основания и полной поверхностью.

26. 1) Какая должна быть зависимость между образующей конуса и радиусом основания, чтобы его полная поверхность была равновелика кругу, за радиус которого принята высота конуса?

2) Какая должна быть зависимость между образующей конуса и радиусом основания, чтобы его полная поверхность была равновелика кругу, радиус которого равен образующей конуса?

Развёртка конуса.

27. 1) Высота конуса 4, радиус основания 3; боковая поверхность конуса развёрнута на плоскость. Найти угол полученного сектора.

2) По радиусу основания R и образующей L определить угол в развёртке боковой поверхности конуса. (Рассмотреть особо случай равностороннего конуса.)

3) Вычислить угол в развёртке боковой поверхности конуса: a) если наибольший угол между образующими прямой; b) если образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°.

28. 1) Полукруг свернут в коническую поверхность. Найти угол между образующей и высотой конуса.

2) Радиус сектора равен 3 *м*; его угол 120°. Сектор свёрнут в коническую поверхность. Найти радиус основания конуса.

29. 1) Боковая поверхность конуса содержит 80 *см*^{2}: угол в её развёртке равен 112°30′. Определить площадь основания.

2) Боковая поверхность конуса равна 10 *см*^{2} и развёртывается в сектор с углом в 36°. Определить полную поверхность.

3) Боковой поверхностью конуса служит свёрнутая четверть круга. Определить полную поверхность этого конуса, если площадь его осевого сечения равна M.

Вписанный и описанный конус.

30. Если наибольший угол между образующими конуса равен 120°, то его боковая поверхность равновелика боковой поверхности цилиндра, имеющего те же самые основание и высоту. Доказать.

31. В равносторонний конус вписана правильная четырёхугольная пирамида. Как относятся боковые поверхности конуса и пирамиды?

32. В данном конусе радиус основания $r = 39$ *см*, а высота $h = 52$ *см*. В него вписан цилиндр такой высоты, что его боковая поверхность равновелика боковой поверхности малого конуса, стоящего на его верхнем основании. Определить высоту цилиндра.

33. В конус с высотой H и образующей L вписан цилиндр, у которого боковая поверхность в n раз менее боковой поверхности конуса. Определить высоту цилиндра ($L = 1{,}5H$; $n = 4$).

34. В конус вписан цилиндр, у которого полная поверхность равновелика боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса равен прямому. Доказать, что расстояние от вершины конуса до верхнего основания цилиндра равно половине образующей конуса.

§ 15. Усечённый конус.

1. (*Устно.*) Радиусы оснований усечённого конуса 3 *м* и 6 *м*; высота 4 *м*. Найти образующую.

2. (*Устно.*) Радиусы оснований усечённого конуса R и r; образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти высоту.

3. Радиусы оснований усеченного конуса 11 *см* и 16 *см*; образующая 13 *см*. Найти расстояние от центра меньше основания до окружности большего.

4. (*Устно.*) Высота усеченного конуса равна H; определить образующую, если она наклонена к основанию под углом в 30°.

5. Образующая усечённого конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом в 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найти каждый из радиусов.

6. Радиусы оснований усечённого конуса 3 *дм* и 7 *дм*, образующая 5 *дм*. Найти площадь осевого сечения.

7. 1) Площади оснований усечённого конуса 4 $м^2$ и 16 $м^2$. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

2) Площади оснований усечённого конуса M и m. Найти площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

8. Площади оснований усечённого конуса 4 и 25. Высота разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найти площади сечений.

9. В усечённом конусе площади оснований 1 $м^2$ и 49 $м^2$. Площадь параллельного сечения равна их полусумме. На какие части это сечение делит высоту?

10. В усечённом конусе высота $h = 10$ *см*, а радиусы оснований 8 *см* и 18 *см*. На каком расстоянии от меньшего основания находится параллельное сечение, площадь которого есть средняя пропорциональная между площадями оснований?

Поверхность усечённого конуса.

11. Высота усечённого конуса 4 *дм*; радиусы его оснований 2 *дм* и 5 *дм*. Найти $S_{бок}$.

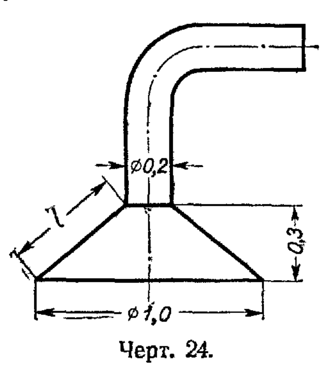
12. Радиусы оснований усечённого конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом 60°. Найти боковую поверхность.

13. Радиусы оснований усечённого конуса и его образующая относятся, как 1 : 4 : 5; высота равна 8 *см*. Найти $S_{бок}$.

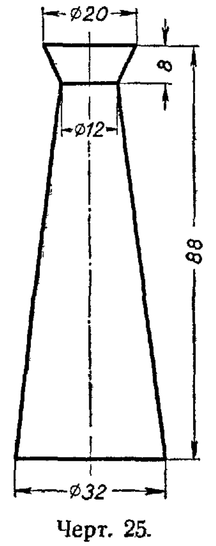
14. 1) Определить высоту усечённого конуса, если его полная поверхность равна 572π $м^2$, а радиусы оснований 6 *м* и 14 *м*.

2) В усечённом конусе высота $h=63$ *дм*, образующая $l=65$ *дм* и боковая поверхность $S = 26\pi$ $м^2$. Определить радиусы оснований.

15. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 *м*, другого конца 0,036 *м* и образующая 1,42 *м*?



Черт. 24.



Черт. 25.

16. Над котлом устроен колпак в форме усечённого конуса, размеры которого (в метрах) даны на чертеже 24. Сколько квадратных метров листового железа потребовалось для его изготовления? (Обрезки не принимаются во внимание.)[1]

17. Сколько олифы потребуется для окраски 100 вёдер конической формы, если диаметры ведра 25 *см* и 30 *см*, а образующая 27,5 *см* и если на 1 $м^2$ требуется 150 *г* олифы?

[1] ⌀ — знак диаметра.

18. Сколько материала пойдёт на изготовление урны, форма и размеры которой (в сантиметрах) указаны на чертеже 25, если на швы требуется прибавить 3%?

19. 1) В усечённом конусе образующая $l = 5$ *см*, а радиусы оснований 1 *см* и 5 *см*. Найти радиус цилиндра с такой же высотой и такой же величиной боковой поверхности.

2) В усечённом конусе радиусы оснований 6 *см* и 10 *см*, а образующая $l = 5$ *см*. Требуется: a) найти радиус цилиндра такой же высоты, полная поверхность которого была бы равновелика боковой поверхности данного усечённого конуса; b) найти радиус цилиндра такой же высоты, полная поверхность которого была бы равновелика полной поверхности усечённого конуса.

20. Определить боковую поверхность усечённого конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°, а площадь осевого сечения равна F.

21. Боковая поверхность усечённого конуса равна S, а радиусы оснований R и r. Определить боковую поверхность полного конуса.

22. Определить высоту усечённого конуса, если его боковая поверхность равновелика сумме оснований, а их радиусы равны R и r.

23. 1) Определить боковую поверхность усечённого конуса, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°, а радиусы отнований R и r.

2) Определить боковую поверхность усечённого конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол в 60°, а площади оснований Q и q.

24. 1) В усечённом конусе даны: высота H, образующая L и боковая поверхность S. Определить площадь осевого сечения.

2) В усечённом конусе определить площадь осевого сечения, если даны площади оснований Q и q и боковая поверхность S.

25. В усечённом конусе радиусы оснований 1 *см* и 3 *см*. Определить образующую, если полная поверхность усечённого конуса должна быть равновелика всему тому круговому кольцу, в часть которого развёртывается боковая поверхность усечённого конуса.

§ 16. Объём параллелепипеда, призмы и цилиндра.

1. (*Устно.*) Объём куба 8 *м*³. Найти его поверхность.

2. Три латунных куба с рёбрами 3 *см*, 4 *см* и 5 *см* переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?

3. 1) Металлический куб имеет внешнее ребро $a = 10{,}2$ *см* и весит 514,15 *г*. Толщина стенок $m = 0{,}1$ *см*. Найти удельный вес металла, из которого сделан куб.

2) Из 10 *кг* свинца отливают куб. Найти ребро куба. (Удельный вес свинца 11,4; угар во внимание не принимается.)

3) Чугунный полый куб, наружное ребро которого 260 *мм*, имеет толщину стенок в 30 *мм*. Найти его вес. (Удельный вес чугуна 7,4.)

4. Определить объём куба: 1) по его диагонали l, 2) по его поверхности S.

5. 1) Если каждое ребро куба увеличить на 2 *см*, то его объём увеличится на 98 *см*^{3}. Определить ребро.

2) Если каждое ребро куба увеличить на 1 *м*, то объём увеличится в 125 раз. Определить ребро.

3) Поверхность (в кв. ед.) и объём куба (в куб. ед.) выражены одним числом. Найти ребро куба.

6. (*Устно.*) Как относятся объёмы двух кубов: данного и его модели, уменьшённой в масштабе 1 : 2; 1 : 3; 1 : 4 и т. д.; вообще 1 : n?

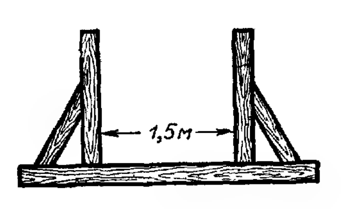
Прямоугольный параллелепипед.

7. Кирпич (25 *см* × 12 *см* × 6,5 *см*) весит 3,51 *кг*. Найти его удельный вес.

8. Требуется установить резервуар для воды ёмкостью в 10 *м*^{3} на площади размером 2,5 *м* × 1,75 *м*, служащей для него дном. Найти высоту резервуара.

9. Прямоугольный золотой лист имеет размеры 4,7 *см* × 6,2 *см* и весит 6,3 *г*. Найти толщину листа. (Удельный вес золота 19,3.)

10. Плот сколочен из 16 балок прямоугольного сечения, из которых каждая имеет 3,6 *м* длины, 0,20 *м* ширины и 0,25 *м* толщины. Какой наибольший груз может он поднять, не затонув? (Удельный вес дерева равен 0,84.)



Черт. 26.

11. Для учёта дров, поступающих в котельную, сделана мерка длиной в 1,5 *м* (черт. 26). Поступающие в котельную дрова имеют разную длину: 54 *см*, 71 *см* и 1 *м*. Определить высоту кладки для каждого размера, если единица измерения во всех случаях — кубический метр.

12. (*Устно.*) Во сколько раз нужно увеличить каждое из трёх измерений прямоугольного бруса, чтобы объём его увеличился вдвое? втрое? вообще в n раз?

13. Измерения прямоугольного бруса: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 *см*^{2}. Как увеличится его объём?

14. 1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м*, 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 *см*, 3 *см* и 6 *см*. Найти ребро такого куба, чтобы объёмы этих тел относились, как их поверхности.

15. 1) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 *см*, а рёбра относятся, как 2 : 3 : 6. Определить объём параллелепипеда.

2) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся, как $m : n$, а диагональное сечение — квадрат с площадью Q. Определить объём параллелепипеда.

16. 1) Площади трёх граней прямоугольного параллелепипеда 2 $м^2$, 3 $м^2$ и 6 $м^2$. Найти его объём.

2) Определить объём прямоугольного параллелепипеда по данным площадям его граней: Q_1, Q_2 и Q_3.

17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой в 45°. Определить объём.

Прямой параллелепипед.

18. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30°; боковая поверхность равна S. Определить его объём.

19. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17 *см*, а стороны равны 9 *см* и 10 *см*. Полная поверхность этого параллелепипеда содержит 334 $см^2$. Определить его объём.

2) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 13 *дм* и 37 *дм*, а бóльшая диагональ основания равна 40 *дм*. Боковое ребро относится к большей диагонали параллелепипеда, как 15 : 17. Определить объем этого параллелепипеда.

20. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ *см* и 5 *см* и образуют угол в 45°; меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 *см*. Определить его объём.

21. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60°; меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определить объём этого параллелепипеда.

22. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 1 $м^2$. Площади диагональных сечений 3 $м^2$ и 6 $м^2$. Найти объём параллелепипеда.

2) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q; площади диагональных сечений равны M и N. Определить объём параллелепипеда.

23. Основанием параллелепипеда служит ромб; диагональные сечения перпендикулярны к плоскости основания, и площади их содержат 100 $см^2$ и 105 $см^2$, а длина их линии пересечения равна 10 *см*. Определить объём и боковую поверхность этого параллелепипеда.

24. Основание прямого параллелепипеда—параллелограмм, у которого стороны содержат 3 *см* и 5 *см* и образуют угол в 60°; площадь большего диагонального сечения равна 63 $см^2$. Определить меньшую диагональ параллелепипеда, боковую поверхность и объём.

25. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ ребро $AB = 50$ *см*; перпендикуляр B_1E, опущенный из вершины B_1 на ребро AD, равен 41 *см* и делит AD на отрезки $AE = 30$ *см* и $ED = 18$ *см*. Определить объём параллелепипеда.

Правильная призма

26. По стороне основания a и боковому ребру b определить объём правильной призмы: 1) треугольной, 2) четырёхугольной, 3) шестиугольной.

27. Деревянная плитка в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 *см* и толщиной в 0,7 *см* весит 17,3 *г*. Найти удельный вес дерева.

28. Сколько весит железная колонка, имеющая вид правильной двенадцатиугольной призмы, сторона основания которой $a = 12$ *см* и высота $h = 78$ *см*? (Удельный вес 7,4.)

29. Чугунная труба имеет квадратное сечение, её внешняя ширина 25 *см*, толщина стенок 3 *см*. Сколько весит погонный метр трубы? (Удельный вес 7,3.)

30. 1) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 3,5 *м*, а диагональ боковой грани 2,5 *м*. Определить объём.

2) Диагональ правильной четырёхугольной призмы равна 6 *см*, а боковая поверхность 32 $см^2$. Определить объём.

31. 1) Сторона основания правильной треугольной призмы равна a; боковая поверхность равновелика сумме оснований. Определить объём.

2) Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведённого через них, равна Q. Определить объём призмы.

32. Основанием призмы служит правильный треугольник, вписанный в круг радиуса R; боковые грани её — квадраты. Определить объём этой призмы.

33. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 $м^2$, а расстояние между двумя противолежащими боковыми гранями 2 *м*. Найти объём призмы.

34. В правильной шестиугольной призме большее диагональное сечение равновелико основанию, сторона которого a. Определить ребро куба, равновеликого этой призме.

Прямая призма.

35. Вычислить максимальную пропускную способность в кубических метрах за 1 час водосточной трубы, сечение которой изображено на чертеже 27. Скорость течения воды 2 *м/сек*.

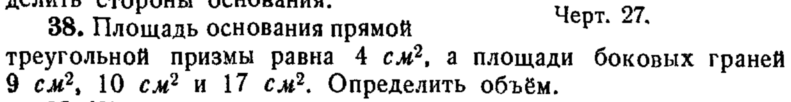
36. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся, как 24 : 7; гипотенуза основания относится к высоте призмы, как 5 : 2; боковая поверхность содержит 140 *м*². Определить объём призмы.

37. 1) В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 *см*, 5 *см* и 7 *см*, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объём призмы.

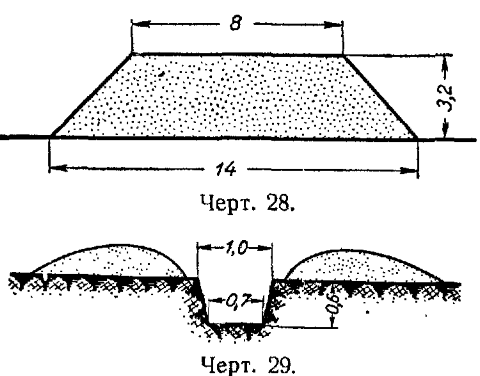
2) Высота прямой треугольной призмы равна 5 *м*, её объём равен 24 *м*³, а площади боковых граней относятся, как 17 : 17 : 16. Определить стороны основания.

Черт. 27.

38. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 *см*², а площади боковых граней 9 *см*², 10 *см*² и 17 *см*². Определить объём.



39. Железнодорожная насыпь дана в разрезе (черт. 28); размеры указаны в метрах. Найти, сколько кубических метров земли приходится на 1 *км* насыпи.



Черт. 28.

Черт. 29.

40. Сколько надо назначить рабочих, чтобы большими лопатами окончить в 6 час. отрывку канавы длиной в 25 *м*? Размеры (в метрах) поперечного сечения канавы указаны на чертеже 29. (Большой лопатой выкапывают 0,75 *м*³ в час.)

41. Основанием прямой призмы служит трапеция $ABCD$, в которой параллельные стороны $AD = 30$ *см* и $BC = 22$ *см*, а непараллельные $AB = 26$ *см* и $CD = 25$ *см*. Площадь сечения AA_1C_1C содержит 400 *см*². Определить объём этой призмы.

42. $ACDB$ — данная полуокружность радиуса R, C — её середина, D — середина дуги CB. Определить объём прямой призмы, у которой основанием служит треугольник ADB, а боковое ребро равно хорде AC.

43. Вырыта канава глубиной в 1,5 *м*, вид и размеры которой (в метрах) указаны на черт. 30. Определить объём земляных работ.

Наклонный параллелепипед.

44. Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограм $ABCD$, в котором $AB = 3$ *дм*, $AD = 7$ *дм* и $BD = 6$ *дм*. Диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 *м*^{2}. Определить объём параллелепипеда.

45. 1) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 *м*. Одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 *м*. Найти объём параллелепипеда.

2) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, и одно из боковых рёбер образует с прилежащими сторонами основания равные острые углы. Сторона основания a; боковое ребро b; расстояние между соответственными сторонами двух оснований c. Определить объём параллелепипеда ($a = 15$; $b = 14$; $c = 10$).

Черт. 30.

46. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в 60°. Определить объём параллелепипеда.

47. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами основания углы в 60°. Определить объём параллелепипеда, боковую поверхность и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

48. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом в 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с рёбрами AB и AD углы в 45°. Определить объём этого параллелепипеда.

Наклонная призма.

49. Основанием призмы служит треугольник, у которого одна сторона равна 2 *см*, а две другие по 3 *см*; боковое ребро равно 4 *см* и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить ребро равновеликого куба.

50. 1) Основанием призмы служит треугольник со сторонами 3 *см*, 5 *см* и 7 *см*. Боковое ребро длиной 8 *см* составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить объём призмы.

2) В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 *м*, 6 *м* и 9 *м*; боковое ребро равно 10 *м* и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить объём призмы.

51. Основанием призмы служит правильный треугольник ABC со стороной a; вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, и ребро AA_1 составляет со стороной основания угол в 45°. Определить объём и боковую поверхность призмы.

52. Основанием наклонной призмы служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Определить объём призмы.

53. 1) Боковые рёбра наклонной треугольной призмы равны 15 *м*, а расстояние между ними 26 *м*, 25 *м* и 17 *м*. Определить её объём.

2) В данной треугольной призме расстояния между боковыми рёбрами относятся, как 9 : 10 : 17; боковое ребро равно 1 *м*; боковая поверхность равна 6 $м^2$. Определить объём этой призмы.

54. Основание наклонной призмы — четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали взаимно перпендикулярны; диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно к плоскости основания. Диагональ $BD = 16$ *дм*, а площадь $AA_1C_1C = 250$ $дм^2$. Определить объём.

55. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней m^2, а расстояние её от противолежащего ребра $2a$. Чему равен объём призмы?

Цилиндр.

56. 25 *м* медной проволоки весит 100,7 *г*. Найти диаметр проволоки. (Удельный вес меди 8,9.)

57. Погонный метр пенькового каната диаметром в 36 *мм* весит 0,96 *кг*. Найти его удельный вес.

58. Столбик ртути в термометре длиной в 15,6 *см* весит 5,2 *г*. (Удельный вес ртути 13,6.) Найти площадь поперечного сечения столбика.

59. В мензурке (цилиндрический сосуд с делениями на кубические сантиметры) расстояние между двумя смежными делениями 1,8 *см*. Найти внутренний диаметр мензурки.

60. Насос, подающий воду в паровой котёл, имеет два водяных цилиндра. Размеры каждого цилиндра: ход поршня 150 *мм*, диаметр 80 *мм*. Определить часовую производительность насоса, если известно, что каждый поршень делает 50 рабочих ходов в 1 минуту.

61. Граната имеет форму цилиндра длиной в $3\frac{1}{2}$ калибра[1] и толщину стенок в $\frac{1}{8}$ калибра. Определить в кубических санти-

[1] **Калибром** называется внутренний диаметр дула пушки.

метрах объём взрывчатого вещества, наполняющего внутреннюю пустоту гранаты полевой пушки калибра в 76 *мм*.

62. (*Устно.*) Найти объём тела, получаемого при вращении квадрата вокруг его стороны a.

63. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объём цилиндра.

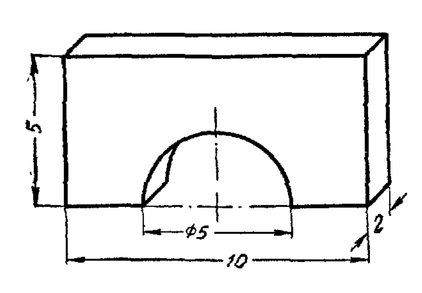
64. (*Устно.*) 1) Как относятся объёмы цилиндра и его модели, уменьшенной в масштабе 1 : 2, 1 : 3 и т. д., 1 : n?

2) Как относятся объёмы двух цилиндров, имеющих равные высоты? равные диаметры оснований?

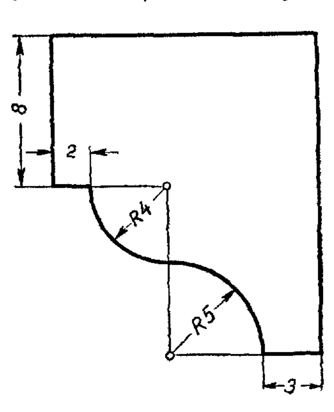
3) Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя основания, чтобы объём его увеличился вдвое? в n раз?

4) Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя его высоты, чтобы объём его увеличился вдвое? в n раз?

5) Боковая поверхность (в кв. ед.) и объём цилиндра (в куб. ед.) выражаются одним числом. Определить диаметр цилиндра.



Черт. 31.



Черт. 32.

65. (*Устно.*) 1) Диаметр основания одного цилиндра равен 0,20 *м*, высота его 0,60 *м*. Другой цилиндр имеет высоту 0,30 *м* и тот же диаметр основания. Сравните между собой объёмы обоих цилиндров.

2) Один цилиндр имеет высоту 2,4 *м* и диаметр основания 1 *м*; другой цилиндр имеет высоту 1,2 *м* и диаметр основания 0,5 *м*. Сравнить между собой объёмы обоих цилиндров.

66. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в последнюю вписан цилиндр. Найти отношение объёмов обоих цилиндров.

67. Боковая поверхность цилиндра равна S, а длина окружности основания C. Найти объём.

68. 1) Боковая поверхность цилиндра развёртывается в квадрат со стороной a. Найти объём. 2) Высота цилиндра равна H, и в развёртке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол в 60°. Определить объём.

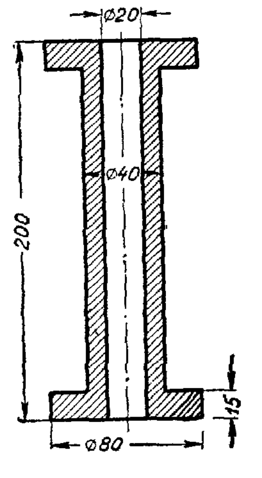
69. Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 *м* длины и 0,8 *м* ширины, можно согнуть в трубку двояким образом; в первом случае длина трубки будет 1,6 *м*, во втором 0,8 *м*. Найти отношение объёмов трубок и их поверхностей.

70. Определить объём цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

71. Определить вес детали из песчаника, данной на чертеже 31. Размеры указаны в дециметрах. (Удельный вес песчаника 2,4.)

72. Сколько весит погонный метр карниза из известняка, поперечный разрез которого дан на чертеже 32? Размеры даны в сантиметрах. (Удельный вес известняка 2,2.)

73. Свинцовая труба (удельный вес свинца 11,4) с толщиной стенок в 4 *мм* имеет внутренний диаметр в 13 *мм*. Сколько весят 25 *м* этой трубы?



Черт. 33.

74. Стальной вал, имеющий 1,40 *м* длины и 0,083 *м* в диаметре, обтачивается на токарном станке, причём диаметр его уменьшается на 0,003 *м*. Сколько теряет он в весе благодаря обточке? (Удельный вес стали 7,4.)

75. Вычислить вес деревянной катушки, размеры которой (в миллиметрах) даны на чертеже 33. (Удельный вес дерева 0,8.)

§ 17. Объём пирамиды и конуса.

Правильная пирамида.

1. По стороне основания a и боковому ребру b определить объём правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

2. (*Устно.*) В правильной четырёхугольной пирамиде высота 3 *м*, боковое ребро 5 *м*. Найти объём.

3. Объём правильной шестиугольной пирамиды 6 $см^2$. Сторона основания 1 *см*. Найти боковое ребро.

4. 1) Апофема правильной треугольной пирамиды равна k, а высота h. Найти объём.

2) Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды Q и боковая поверхность S. Определить объём ($Q=12$; $S=24$).

5. 1) (*Устно.*) Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найти объём пирамиды.

2) Определить объём правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, боковые же рёбра взаимно перпендикулярны.

6. По ребру a правильного тетраэдра определить его поверхность и объём.

7. По ребру a правильного октаэдра определить его поверхность и объём.

8. Соединив последовательно середины рёбер правильного тетраэдра прямыми, получим рёбра правильного октаэдра. Ребро тетраэдра a. Найти объем октаэдра и сравнить его с объёмом тетраэдра.

9. 1) Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. Найти отношение объёмов куба и октаэдра.

2) Центры граней правильного октаэдра служат вершинами куба. Найти отношение объёмов октаэдра и куба.

10. 1) Сторона основания правильной треугольной пирамиды a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Определить объём пирамиды.

2) Высота правильной треугольной пирамиды h, а боковая грань образует с плоскостью основания угол в 60°. Определить объём пирамиды.

11. 1) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Определить объём пирамиды.

2) В данной правильной шестиугольной пирамиде, имеющей объём V, боковое ребро вдвое более стороны основания. Определить сторону основания и угол бокового ребра с плоскостью основания.

Неправильная пирамида.

12. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 9 *м* и 12 *м*; каждое из боковых рёбер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 6 *см* и 15 *см*, высота проходит через точку пересечения диагоналей основания, и боковая поверхность равна 126 $см^2$. Определить объём этой пирамиды.

14. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 6 *см*, а третья

сторона 8 *см*. Боковые рёбра равны между собой, и каждое содержит 9 *см*. Определить объём этой пирамиды.

15. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен 60°, а площадь равна Q; боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Определить объём этой пирамиды.

16. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39 *см*, 17 *см* и 28 *см*; боковые рёбра равны каждое 22,9 *см*. Определить объём этой пирамиды.

17. 1) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 39 *см*, а третья сторона 30 *см*. Двугранные углы при основании равны между собой, и каждый содержит 45°. Определить объем этой пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 7 *см*, а третья сторона 6 *см*; вершина пирамиды удалена от всех сторон основания на одинаковое расстояние, которое относится к высоте пирамиды, как 5 : 4. Определить объём этой пирамиды.

18. В данной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны между собой; стороны основания: 7 *см*, 8 *см* и 9 *см*; объём пирамиды 40 *см*^{2}. Определить её боковую поверхность.

19. Ромб со стороной в 15 *см* служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом в 45°. $S_{бок} = 3$ *дм*^{2}. Найти объём пирамиды.

20. (*Устно.*) Боковые рёбра треугольной пирамиды a, b и c взаимно перпендикулярны. Найти объём пирамиды.

21. 1) Две взаимно перпендикулярные грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной в 4 *см*. Найти объем пирамиды.

2) Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 *м*^{2}, 4 *м*^{2} и 3 *м*^{2}. Найти объемы пирамиды.

22. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4; каждое из остальных равно 3. Найти объём пирамиды.

23. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC, в котором $AB = 15$ *см*, $BC = 27$ *см* и $AC = 18$ *см*. Грани SAB и SAC перпендикулярны к плоскости ABC, а грань SBC составляет с ней угол в 45°. Определить объём пирамиды и площадь грани BSC.

24. Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 1 *м*^{2}, две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углами в 30° и 60°. Найти объем.

25. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны равны 3 *см* и 5 *см*, а боковая сторона 7 *см*. Высота пирамиды проходит через точку

пересечения диагоналей основания, и большее боковое ребро равно 10 *см*. Определим объём этой пирамиды.

26. В треугольной пирамиде одна из сторон основания равна 16 *см*; противоположное ей боковое ребро 18 *см*; каждое из четырёх остальных рёбер равно 17 *см*. Определить объём этой пирамиды.

27. (*Устно*). 1) Какую часть объёма пирамиды отсекает среднее сечение?

2) Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины пирамиды находится сечение, параллельное основанию и делящее её объём пополам?

28. Плоскостями, параллельными основанию пирамиды, её высота разделена на пять равных частей. В каком отношении разделился объём пирамиды?

29. Пирамида разделена на три равновеликие части плоскостями, параллельными основанию. В каком отношении разделилась высота?

30. Площадь сечения, параллельного основанию пирамиды, составляет 0,36 её основания. В каком отношении сечение делит объём пирамиды?

31. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового правильного тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и объёмов.

Конус.

32. (*Устно*). Высота конуса 3, образующая 5. Найти объём.

33. 122-миллиметровая бомба даёт при взрыве воронку диаметром в 4 *м* и глубиной в 1,5 *м*. Какое количество земли (по весу) выбрасывает эта бомба? 1 $м^3$ земли весит 1650 *кг*.

34. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 *м* и образующая 3,5 *м*. Сколько надо возов, чтобы перевезти щебень, уложенный в десяти таких кучах? 1 $м^3$ щебня весит 3 *т*. На один воз грузят 0,5 *т*.

35. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 *м*, высота 4 *м*, причём цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 *м*. Удельный вес сена 0,03. Определить вес стога.

36. Жидкость, налитая в конический сосуд, имеющий 0,18 *м* высоты и 0,24 *м* в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 *м*. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

37. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник; площадь его 9 $м^2$. Найти объём конуса.

38. Площадь основания конуса 9π *см*²; полная поверхность его 24π *см*². Найти объём конуса.

39. Высота и образующая конуса относятся, как $4:5$, а объём конуса 96π *см*³. Найти его полную поверхность.

40. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания C. Определить объём.

41. Определить объём конуса по данной площади Q основания и боковой поверхности S.

42. Высота конуса равна 15 *м*, а объём равен 320π *м*³. Определить полную поверхность.

43. Высота конуса равна 6 *см*, а боковая поверхность 24π *см*². Определить объём конуса.

44. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определить объём конуса.

45. Объём конуса V. Высота его разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найти объём средней части.

46. 1) Как относятся объёмы равностороннего конуса и равностороннего цилиндра, если их полные поверхности равновелики?

2) Как относятся полные поверхности равностороннего конуса и равностороннего цилиндра, если их объёмы равны?

47. 1) Объём конуса V, а радиус основания равен R. Чему равна площадь осевого сечения конуса?

2) В конусе площадь основания равна Q и площадь осевого сечения M. Определить объём и боковую поверхность.

48. На одном основании построены конус и равновеликий ему цилиндр. Параллельно основанию проведена плоскость через середину высоты цилиндра. Как относятся площади полученных сечений конуса и цилиндра?

49. Из жести вырезан сектор радиуса в 20 *см* с центральным углом в 250° и свёрнут в конус. Найти объём конуса.

50. По радиусу R основания конуса определить радиус сечения, параллельного основанию, делящего пополам объём конуса.

51. Определить объём и боковую поверхность конуса, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

Конус как тело вращения.

52. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найти поверхность и объём тела вращения.

53. Основание треугольника b, высота его h. Найти объём тела, полученного при вращении его вокруг основания.

54. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается около гипотенузы. Определить объём и поверхность полученного тела.

55. 1) Определить объем и поверхность тела, образуемого вращением равнобедренного треугольника вокруг боковой стороны, если основание равно 30 *см*, а боковая сторона 25 *см*.

2) Равнобедренный треугольник с углом при вершине в 120° и боковой стороной a вращается вокруг боковой стороны. Определить объём и поверхность тела вращения.

56. 1) Треугольник со сторонами в 10 *см*, 17 *см* и 21 *см* вращается вокруг большей стороны. Определить объём и поверхность полученного тела.

2) Такой же вопрос для треугольника со сторонами: 6 *см*, 25 *см* и 29 *см*, вращаемого вокруг меньшей стороны.

57. Треугольник с углом в 60°, заключённым между сторонами 8 *см* и 15 *см*, вращается вокруг большей из этих сторон. Определить объём и поверхность тела вращения.

58. Полуокружность с диаметром AB делится точкой M в отношении 1 : 2. Определить объём и поверхность тела, образуемого вращением треугольника ABM вокруг оси AB, если меньшая сторона треугольника равна a.

59. 1) Если треугольник ABC вращается вокруг стороны $BC = a$, то объём полученного тела $V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, где Q — площадь треугольника Доказать

2) Объёмы тел, образуемых вращением какого-нибудь треугольника последовательно вокруг каждой стороны, обратно пропорциональны этим сторонам. Доказать.

§ 18. Объём усечённой пирамиды и усечённого конуса.

Усечённая пирамида.

1. 1) Сколько литров воды вмещает яма, вырытая в виде усечённой пирамиды, если глубина ямы 1,5 *м*, сторона нижнего квадратного основания 0,8 *м*, а верхнего 1,2 *м*?

2) Яма, имеющая вид правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, вмещает 349 *гл* воды. Найти ее глубину, зная, что сторона нижнего основания её равна 1,4 *м*, а верхнего 2,3 *м*.

2. Гранитная подставка имеет вид усечённой пирамиды высотой в 3,6 *м* с квадратными основаниями. Стороны оснований: $a = 2,8$ *м* и $b = 2$ *м* Найти вес подставки. (Удельный вес гранита 2,5.)

3. Боковое ребро правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равно 3 *м*, стороны оснований 5 *м* и 1 *м*. Найти объём.

4. Площади оснований усечённой пирамиды равны 245 $м^2$ и 80 $м^2$, а высота полной пирамиды равна 35 *м*. Определить объём усечённой пирамиды.

5. 1) Высота усечённой пирамиды равна 15 *м*, её объём 475 $м^3$; площади оснований относятся, как 4 : 9. Определить эти площади.

2) В правильной четырехугольной усечённой пирамиде объём равен 430 $м^3$, высота равна 10 *м* и сторона одного основания 8 *м*. Определить сторону другого основания.

6. 1) В усеченной пирамиде объём равен 76 $м^3$, высота 6 *м* и площадь одного из оснований равна 18 *м*. Определить площадь другого основания.

2) В усечённой пирамиде разность площадей оснований равна 6 $см^2$, высота усечённой пирамиды 9 *см* и её объём 42 $см^3$. Определить площади оснований

7. Объём усечённой пирамиды равен 1720 $м^3$, её высота 20 *м*; сходственные стороны двух оснований относятся, как 5 . 8. Определить площади оснований

8. В треугольной усечённой пирамиде высота 10 *м*, стороны одного основания: 27 *м*, 29 *м* и 52 *м*; периметр другого основания равен 72 *м*. Определить объём усечённой пирамиды.

9. По боковому ребру l и сторонам оснований a и b определить объём правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

10. 1) В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде апофема и стороны оснований относятся, как 5 : 8 : 2, а объём $1\frac{3}{4}$ $м^3$. Определить ее полную поверхность.

2) Определить объём правильной треугольной усечённой пирамиды, у которой стороны оснований 30 *м* и 20 *м*, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

11. Определить объем правильной четырехугольной усечённой пирамиды, если её диагональ равна 9 *см*, а стороны оснований 7 *см* и 5 *см*.

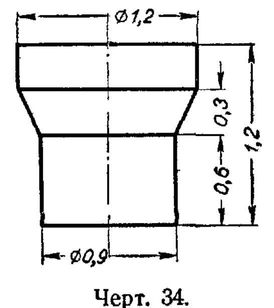
12. Определить объём правильной шестиугольной усечённой пирамиды, если стороны её оснований a и b, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 30°.

13. Правильная четырёхугольная усечённая пирамида разделена на три части двумя плоскостями, проведёнными через две противоположные стороны меньшего основания перпендикулярно к плоскости большего основания. Определить объём каждой части, если в усечённой пирамиде высота равна 4 *см*, а стороны оснований 2 *см* и 5 *см* Сделать чертёж.

14. В треугольной усечённой пирамиде через сторону меньшего основания проведена плоскость параллельно противолежащему боковому ребру. В каком отношении разделился объём усечённой пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся, как $1:2$?

15. Правильная четырёхугольная усечённая пирамида срезана с двух противоположных боков двумя плоскостями, проведёнными через концы диагонали верхнего основания перпендикулярно к этой диагонали. Определить объём оставшейся части усечённой пирамиды, если её высота h, а стороны оснований a и b.

16. Из правильной четырёхугольной усечённой пирамиды вырезана часть её в виде двух пирамид, имеющих общую вершину в точке пересечения её диагоналей, а основаниями — её основания. Определить объём оставшейся части усечённой пирамиды, если её высота h, а стороны оснований a и b.



Черт. 34.

17. Через точку пересечения диагоналей правильной четырёхугольной усечённой пирамиды проведена параллельно основаниям плоскость. Стороны оснований 6 *м* и 3 *м*, высота пирамиды 9 *м*. Найти диагональ сечения и объём каждой части пирамиды.

18. Даны площади Q и q оснований усечённой пирамиды и её высота h. Определить объём полной пирамиды и объём отсечённой верхней части.

19. Площади оснований усечённой пирамиды Q и q, а её объём V. Определить объём полной пирамиды.

20. В усечённой пирамиде сходственные стороны двух оснований относятся, как $m:n$. В каком отношении делится её объём средним сечением? ($m:n=5:2$.)

Усечённый конус.

21. Отрезок ствола сосны длиной 15,5 *м* имеет следующие диаметры своих концов: $d_1=42$ *см* и $d_2=25$ *см*. Определить процент ошибки, которую мы делаем, вычисляя объём сосны умножением площади среднего поперечного сечения ствола на его длину.

22. Сосуд имеет форму и размеры (в метрах), показанные на чертеже 34. Найти ёмкость сосуда.

23. Размеры (в сантиметрах) и форма бидона даны на чертеже 35. Найти вместимость бидона в литрах ($\alpha=45°$).

24. Радиусы оснований усечённого конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объём.

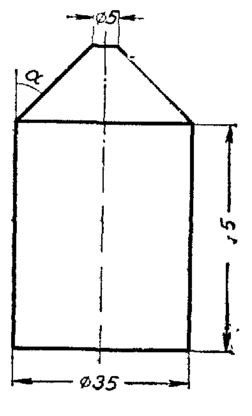
25. Высота усечённого конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объём.

26. Радиус одного основания усечённого конуса вдвое больше другого; боковая поверхность равна сумме площадей оснований; площадь осевого сечения равна 36 *м*². Найти объём.

27. 1) Объём усечённого конуса равен 584π *см*³, а радиусы оснований 10 *см* и 7 *см*. Определить высоту.

2) В усечённом конусе радиусы оснований и образующая относятся, как 4 : 11 : 25, объём равен 181π *м*³. Определить радиусы оснований и образующую.

3) Объём усечённого конуса равен 248π *см*³; его высота 8 *см*, радиус одного из оснований 4 *см*. Определить радиус второго основания.



Черт. 35.

28. Усечённый конус, у которого радиусы оснований 3 *см* и 5 *см*, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?

29. Объём усечённого конуса равен 52 *см*³; площадь одного основания в 9 раз более площади другого. Усечённый конус достроен до полного. Найти объём полного конуса.

30. 1) Равнобедренная трапеция с параллельными сторонами в 7 *см* и 17 *см* и площадью 144 *см*² вращается около средней высоты. Определить объём полученного тела.

2) AB — диаметр полукруга; $ACDB$ — вписанная трапеция, причём $\angle CAB = 60°$. Эта трапеция вращается вокруг радиуса, перпендикулярного к AB. Определить объём тела вращения, если радиус равен R.

31. Площадь осевого сечения усечённого конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Определить его объём.

32. Высота усечённого конуса равна 12 *см*, площадь среднего параллельного сечения равна 225π *см*² и объём 2800π *см*³. Определить радиусы оснований.

33. Образующая усечённого конуса равна 17 *см*, площадь осевого сечения 420 *см*² и площадь среднего сечения равна 196π *см*². Определить его объём и боковую поверхность.

34. 1) На меньшем основании усечённого конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания конуса. Объём полученного цилиндра составляет

седьмую часть объёма усечённого конуса. Найти зависимость между радиусами оснований усечённого конуса.

2) Найти зависимость между радиусами оснований усечённого конуса, если его объём разделился пополам конической поверхностью, вершина которой лежит в центре верхнего основания и основанием которой служит нижнее основание усечённого конуса.

35. Усечённый конус, у которого радиусы оснований 4 *см* и 22 *см*, требуется превратить в равновеликий цилиндр такой же высоты. Определить радиус основания этого цилиндра.

36. В усечённом конусе высота равна 18 *см*, а радиусы оснований 5 *см* и 11 *см*. Высота разделена на три равные части двумя плоскостями, параллельными основаниям. Определить объём полученных частей усечённого конуса.

37. Радиус одного основания усечённого конуса вчетверо больше радиуса другого. Высота разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. В каком отношении разделился объём?

38. По данным радиусам оснований R и r определить отношение объёма усечённого конуса к объёму полного конуса.

39. Деревянный усечённый конус (удельный вес 0,58), высота которого $h = 48$ *см* и диаметры оснований $D_1 = 44$ *см* и $D_2 = 32$ *см*, просверлён цилиндрически вдоль оси. Оси цилиндра и конуса совпадают. Диаметр цилиндра $d = 10$ *см*. Просверлённая часть заполнена железом (удельный вес 7,5). Найти удельный вес образовавшегося таким образом тела.

40. В усечённом конусе радиусы оснований R и r и высота h. Из него вырезаны два конуса, у которых основаниями служат основания данного усечённого, а образующие одного служат продолжениями образующих другого. Определить объём оставшейся части.

§ 19. Объём призматоида (клина) и усечённой призмы.

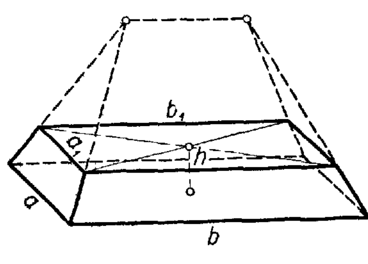
Формула Ньютона—Симпсона: объём V равен $\frac{1}{6}H(Q_1+Q_2+4Q_0)$.

1. Проверить пригодность формулы Ньютона—Симпсона для вычисления объёма призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, усечённой пирамиды и усечённого конуса.

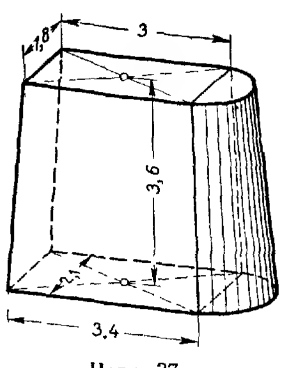
2. Запруда имеет форму тела, изображённого на чертеже 36 (призматоид). Сколько тачек земли надо было привезти, чтобы устроить её? Нижнее основание запруды имеет форму прямоугольника в 58 *м* длины и 4,6 *м* ширины, верхнее основание — прямоугольник в 50 *м* длины и 3,4 *м* ширины; высота её равна 2,3 *м*; тачка же вмещает 0,38 $м^3$ земли.

3. Куча песку насыпана в виде призматоида; нижним основанием его служит прямоугольник со сторонами a и b, верхним — прямоугольник со сторонами a_1 и b_1; высота кучи h. Сколько кубических метров песку содержится в куче, если размеры даны в метрах?

4. Кузов телеги имеет следующие размеры: внизу 1,35 *м*×0,62 *м*, вверху 1,52 *м* × 0,86 *м*; глубина его 0,75 *м*; дно плоское. Кузов наполнен доверху песком, удельный вес которого 1,9. Сколько весит песок?

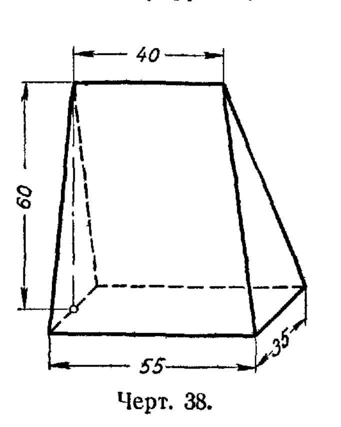


Черт. 36.

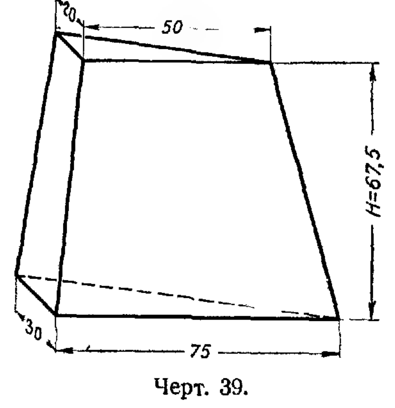


Черт. 37.

5. Бетонный бык для моста имеет форму и размеры (в метрах), показанные на чертеже 37. Найти объём быка. (Каждое из оснований быка представляет собой прямоугольник, соединённый с полукругом.)



Черт. 38.



Черт. 39.

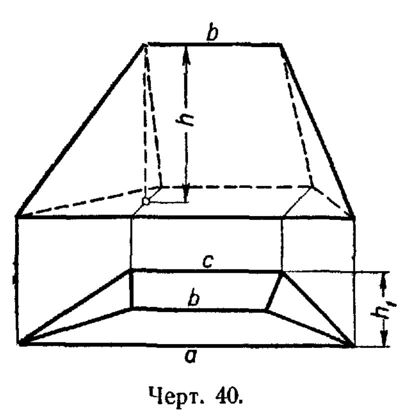
6. Найти объём клина, форма и размер которого (в сантиметрах) даны на чертеже 38. (В основании лежит прямоугольник; ребро, противолежащее основанию, параллельно основанию.)

7. Найти объём клина, форма и размер которого (в сантиметрах) даны на чертеже 39. (Верхнее и нижнее основания имеют форму прямоугольных треугольников; длина их катетов указана на чертеже.)

8. Найти объём чердачного помещения, план которого представляет собой трапецию с параллельными сторонами a и c и высотой h_1; высота крыши h, конёк её b (черт. 40).

9. В усечённом параллелепипеде три боковых ребра по порядку имеют следующую длину: 15 *см*, 23 *см* и 18 *см*. Определить четвёртое боковое ребро.

10. В усечённой правильной четырёхугольной призме дано: сторона основания равна a; из боковых рёбер — два смежных имеют длину b, два других длину c. Определить объём и боковую поверхность этой усечённой призмы.



Черт. 40.

11. Основанием прямой усечённой призмы служит прямоугольный треугольник ABC, в котором катет $AC = 15$ *см* и катет $BC = 20$ *см*. Боковые рёбра BB_1 и CC_1 содержат по 10 *см*, а $AA_1 = 18$ *см*. Определить объём и полную поверхность этой усечённой призмы.

12. 1) Доказать, что объём треугольной усечённой призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на среднее арифметическое длин трёх боковых рёбер.

2) В треугольной усечённой призме боковые рёбра: 17 *см*, 25 *см* и 30 *см*, а расстояния между ними: 18 *см*, 20 *см* и 34 *см*. Определить объём этой усечённой призмы.

13. Определить объём и боковую поверхность треугольной усечённой призмы, у которой боковые рёбра равны l, m и n и находятся на расстоянии a одно от другого.

§ 20. Шар и его свойства.

1. 1) Шар, радиус которого равен 41 *дм*, пересечён плоскостью на расстоянии 9 *дм* от центра. Определить площадь сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

2. Радиус шара равен 63 *см*. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 *см* от точки касания. Найти её кратчайшее расстояние от поверхности шара.

3. Угол между радиусами, проведёнными к двум точкам поверхности шара, равен 60°, а кратчайшее расстояние между этими точками по поверхности шара 5 *см*. Определить радиус шара $\left(\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\right)$.

4. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найти площадь сечения.

5. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом в 30° к первой. Найти площадь сечения.

6. 1) Радиус земного шара R. Чему равна длина окружности параллельного круга, если его широта равна 60°?

2) Город N находится на 60° северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 *км*.

7. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 *см*, 8 *см*, 10 *см*. Радиус шара 13 *см*. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

8. Диаметр шара 25 *см*. На его поверхности дана точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой линии) от A на 15 *см*. Найти радиус этой окружности.

9. Радиус шара 15 *м*. Вне шара дана точка A на расстоянии 10 *м* от его поверхности. Найти длину такой окружности на поверхности шара, все точки которой отстоят от A на 20 *м*.

10. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту; через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Доказать, что площадь сечения, заключённая между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.

11. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Доказать, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности.

12. 1) Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

2) Радиусы двух шаров 25 *дм* и 29 *дм*, а расстояние между их центрами 36 *дм*. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

13. Стороны треугольника: 13 *см*, 14 *см*, 15 *см*. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара 5 *см*.

14. Диагонали ромба 15 *см* и 20 *см*. Шаровая поверхность касается всех сторон его. Радиус шара 10 *см*. Найти расстояние его центра от плоскости ромба.

15. На шар, радиус которого 5 *дм*, наложен ромб так, что каждая сторона его, равная 6 *дм*, касается шара. Расстояние плоскости ромба от центра шара 4 *дм*. Найти площадь ромба.

16. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найти радиус R шара.

17. Радиус шара 7 *см*. На его поверхности даны две равные окружности, пересекающиеся по хорде, равной 2 *см*. Найти радиусы этих окружностей, зная, что плоскости их перпендикулярны.

18. Две касательные к шару плоскости образуют угол в 120°, обращённый к поверхности шара. Кратчайшее расстояние по поверхности шара между точками касания 70 *см*. Найти радиус шара.

§ 21. Объём шара и его частей.

Шар.

1. (*Устно.*) 1) Радиус шара 1 *м*. Найти объём шара.

2) Во сколько раз увеличится объём шара, если радиус его увеличить в 3 раза? в 4 раза?

2. Чугунные шары регулятора весят каждый 10 *кг*. Найти диаметр каждого шара. Удельный вес чугуна 7,2.

3. 1) Требуется перелить в один шар два чугунных шара с диаметрами $d_1 = 25$ *см* и $d_2 = 35$ *см*. Найти диаметр нового шара. (Угар во внимание не принимается.)

2) Радиусы трёх шаров: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Определить радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.

4. Имеется кусок свинца весом в 1 *кг*. Сколько шариков диаметром в 1 *см* можно отлить из куска? Удельный вес свинца 11,4.

5. (*Устно.*) 1) Свинцовый шар, диаметр которого 20 *см*, переливается в шарики с диаметром, в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится? Какое данное в задаче лишнее?

2) Нужно отлить свинцовый шар с диаметром в 3 *см*. Имеются свинцовые шарики с диаметром в 5 *мм*. Сколько таких шариков нужно взять?

6. Свинцовый шарик, диаметр которого равен 0,012 *м*, и полый стеклянный шар с диаметром в 0,160 *м* уравновешены на

коромысле весов, т. е. в воздухе имеют равный вес. Если перенести всю эту систему под колокол воздушного насоса и выкачать из-под колокола весь воздух, то какой шар опустится и как велика будет разница в весе шаров? Прибор этот в физике называется *бароскопом*. Удельный вес воздуха 0,0013.

7. 1) Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания (равносторонний цилиндр), выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено?

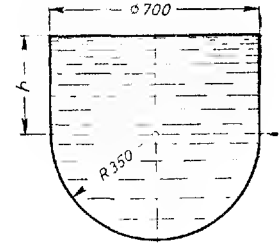
2) Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

8. Если радиусы трёх шаров относятся, как 1 : 2 : 3, то объём большего шара в три раза больше суммы объёмов меньших шаров. Доказать.

9. Внешний диаметр полого шара 18 *см*; толщина стенок 3 *см*. Найти объём стенок.

10. Внутренний диаметр чугунного полого шара 8 *см*, а внешний 10 *см*. Определить вес шара. Удельный вес чугуна 7,3.

11. Объём стенок полого шара равен 876π *см*^{3}, а толщина стенок 3 *см*. Определить радиусы его поверхностей: наружной и внутренней.



Черт. 41.

12. В основание равностороннего цилиндра радиуса R вписан квадрат, и на нём построена правильная четырёхугольная пирамида с равносторонними боковыми гранями. Требуется определить радиус шара, объём которого равен сумме объёмов цилиндра и пирамиды.

13. Сосуд имеет форму опрокинутого конуса, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. В него брошен железный шар радиуса R. В сосуд налита вода так, что поверхность воды касается погружённого в нее шара. На какой высоте будет вода, если вынуть шар?

14. Резервуар для воды состоит из полушара радиуса R и цилиндра с таким же радиусом основания (черт. 41). Какой высоты h должна быть цилиндрическая часть его, чтобы объём всего резервуара равнялся 200 *м*^{3}? (Размеры даны в сантиметрах.)

Шаровой сегмент.

15. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части: 3 *см* и 9 *см*. На какие части делится объём шара?

16. Какую часть объёма шара составляет объём сферического сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

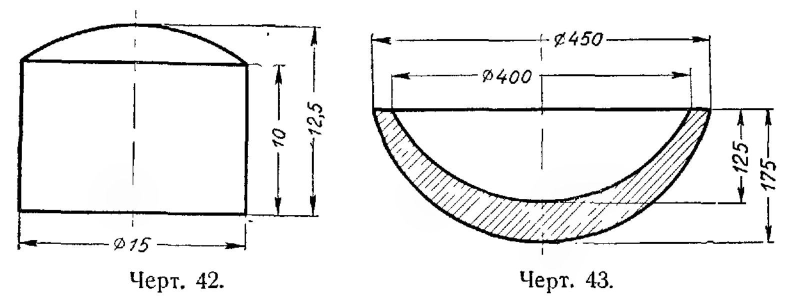
17. Высота шарового сегмента составляет 0,4 радиуса шара. Какую часть составляет объём этого сегмента от объёма цилиндра, имеющего те же основания и высоту?

18. Газовый резервуар, размеры которого даны на чертеже 42 в метрах, имеет форму цилиндра, на который насажен шаровой сегмент. Определить ёмкость резервуара.

19. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму целого шара?

20. Диаметр шара, равный 30 *см*, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 *см*. Определить объём части шара, заключённой внутри цилиндра.

21. Литейный ковш имеет продольный разрез, показанный на чертеже 43. Внутренняя и внешняя поверхности — сферические (размеры даны в миллиметрах). Удельный вес 7,9. Найти вес ковша.



Черт. 42. Черт. 43.

22. Радиусы поверхностей двояковыпуклого сферического стекла 10 *см* и 17 *см*. Расстояние между их центрами 21 *см*. Найти объём стекла.

Шаровой сектор.

23. Радиус шарового сектора R, угол в осевом сечении 120°. Найти объём.

24. Определить объём шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 *см*, а радиус шара равен 75 *см*.

25. Круговой сектор с углом в 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Определить объём полученного тела.

26. Полукруг радиуса R, разделённый двумя радиусами на три равные части, вращается вокруг диаметра. Найти объёмы тел, полученных от вращения каждой части.

27. Если в сферическом секторе площадь осевого сечения равна $\frac{1}{3}$ площади большого круга, то его объём равен $\frac{1}{4}$ объёма шара. Доказать.

Шароной слой.

28. Радиусы оснований шарового слоя 3 *м* и 4 *м*, а радиус его шаровой поверхности 5 *м*. Найти объём слоя. (Два случая.)

29. В шаре, радиус которого равен 65 *см*, проведены по одну сторону центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 16 *см* и 25 *см*. Определить объём части шара, заключённой между ними.

30. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объём тела, заключённого между их боковыми поверхностями, равен 36π *см*^{3}. Найти их высоту.

31. Доказать, что объём тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a около диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

§ 22. Поверхность шара и его частей.

Шар.

1. 1) (*Устно.*) Площадь большого круга равна 1 *м*^{2}. Найти поверхность шара.

2) Кривая поверхность полушара на M более площади его основания. Найти площадь основания.

3) Дан полушар радиуса R. Найти его полную поверхность.

2. 1) Радиус шара равен 5 *см*. Определить его поверхность ($\pi = 3{,}1416$).

2) Поверхность шара равна 225π *м*^{2}. Определить его объём.

3) По объёму шара V определить его поверхность.

3. (*Устно.*) 1) Как изменятся поверхность и объём шара, если радиус увеличить в 4 раза? в 5 раз?

2) Поверхности двух шаров относятся, как $m : n$. Как относятся их объёмы?

3) Объёмы двух шаров относятся, как $m : n$. Как относятся их поверхности?

4. Гипотенуза и катеты служат диаметрами трёх шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

5. В шаре проведены по одну сторону центра два параллельных сечения; площади их равны 49π *дм*^{2} и 4π *м*^{2}, а расстояние между ними 9 *дм*. Определить поверхность шара.

6. 1) Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Доказать.

2) Если равносторонний конус и полушар имеют общее основание, то боковая поверхность конуса равновелика сферической поверхности полушара, а линия их пересечения вдвое короче окружности основания. Доказать.

3) Объём шара (в куб. ед.) и его поверхность (в кв. ед.) выражаются одним и тем же числом. Найти радиус шара.

7. Кусок металла, имевший сначала форму равностороннего цилиндра, перелит в форму шара. Как изменилась величина его поверхности?

8. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Доказать.

Шаровой пояс.

9. Радиусы оснований шарового пояса 20 *м* и 24 *м*, а радиус шара 25 *м*. Определить поверхность шарового пояса. (Два случая.)

10. По радиусу шара R определить высоту сферического слоя, одно из оснований которого — большой круг шара и боковая поверхность которого равновелика сумме оснований.

11. Высота шарового пояса 7 *см*, а радиусы оснований 16 *см* и 33 *см*. Определить поверхность шарового пояса.

12. Поверхность шарового пояса выразить через высоту h и радиусы оснований r и r_1 $(r > r_1)$.

Сегмент и сектор.

13. По данному радиусу шара R определить высоту сферического сегмента, у которого боковая поверхность в m раз более площади основания. $(m = 4)$.

14. Если полуокружность, разделённая на три равные части, вращается около своего диаметра, то поверхность, описанная средней дугой, равновелика сумме поверхностей, описанных боковыми дугами. Доказать.

15. Кривую поверхность шарового сегмента определить по его высоте h и радиусу основания r.

16. Круговой сегмент с дугой в 120° и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Определить полную поверхность полученного тела.

17. Боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента. Доказать.

18. 1) Радиус шара равен 15 *см*. Определить часть его поверхности, видимую из точки, удалённой от центра на 25 *см*.

2) На каком расстоянии от центра шара радиуса R должна быть светящаяся точка, чтобы она освещала $\frac{1}{3}$ его поверхности?

19. Круговой сектор с углом 90° и площадью Q вращается вокруг среднего радиуса. Найти поверхность полученного тела.

20. Определить, какую часть объёма шара составляет объём сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

21. Шар радиуса $R = 10$ *см* цилиндрически просверлён по оси. Диаметр отверстия 12 *см*. Найти полную поверхность тела.

22. По данным задачи № 18 в § 21 определить, сколько квадратных метров жести требуется для изготовления резервуара.

§ 23. Вписанный и описанный шары.

Куб, параллелепипед, призма и шар.

1. (*Устно.*) Ребро куба равно a. Найти радиусы шаров: вписанного в куб и описанного около него.

2. 1) Рёбра прямоугольного параллелепипеда 4 *см*, 6 *см*, 12 *см*. Найти радиус описанного шара.

2) Высота правильной четырёхугольной призмы 2 *см*, сторона основания 4 *см*. Найти радиус описанного шара.

3. Радиус шара 9 *дм*. В него вписана правильная четырёхугольная призма, высота которой 14 *дм*. Найти сторону основания призмы.

4. Высота правильной шестиугольной призмы 8 *м*. Диагональ боковой грани 13 *м*. Найти радиус описанного шара.

5. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить её полную поверхность.

6. Боковое ребро правильной треугольной призмы 2 *м*, сторона основания 3 *м*. Найти диаметр описанного шара.

7. В шар, радиус которого 14 *см*, вписана правильная треугольная призма; диагональ её боковой грани 26 *см*. Найти сторону основания призмы.

8. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 *см*, 8 *см* и 10 *см*. Высота призмы 24 *см*. Найти радиус описанного шара.

9. Вокруг шара радиуса R описана правильная треугольная призма. Найти поверхность и объём призмы.

10. Как относятся между собой поверхности трёх шаров, если первая поверхность касается граней куба, вторая касается его рёбер и третья проходит через его вершины?

11. Около шара описана правильная треугольная призма, а около неё описан шар. Как относятся между собой поверхности этих шаров?

Пирамида и шар.

12. В правильной четырёхугольной пирамиде высота h, боковое ребро b. Найти радиус описанного шара.

13. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды 4 *м*, высота тоже 4 *м*. Найти радиус описанного шара.

14. 1) По ребру a правильного тетраэдра определить радиусы шаров описанного и вписанного.

2) Как относятся между собой поверхности трёх шаров, если первая поверхность касается граней правильного тетраэдра, вторая касается его рёбер, а третья проходит через его вершины?

15. По ребру a правильного октаэдра определить радиусы шаров описанного и вписанного.

16. 1) Определить радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. 2) Такая же задача для угла в 45°.

17. В данной пирамиде все боковые рёбра равны 9 *см*, а её высота 5 *см*. Определить радиус описанного шара.

18. В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида, высота которой делится центром шара на две части: в 4 *см* и 5 *см*. Найти объём пирамиды.

19. Высота правильной треугольной пирамиды h. Боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Найти радиус описанного шара.

20. В правильной пирамиде высота H, радиус основания R. При каком соотношении между высотой и радиусом основания центр описанного шара лежит: 1) на основании пирамиды, 2) внутри пирамиды и 3) вне пирамиды?

21. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 *дм*. Одно из боковых рёбер равно 2 *дм* и перпендикулярно к основанию. Найти радиус описанного шара.

Усечённая пирамида и шар.

22. Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды 7 *дм* и 1 *дм*. Боковое ребро наклонено к основанию под углом в 45°. Найти радиус описанного шара.

23. В правильной шестиугольной усечённой пирамиде стороны оснований 3 *м* и 4 *м*, высота 7 *м*. Найти радиус описанного шара.

24. В правильной треугольной усечённой пирамиде высота 17 *см*, радиусы окружностей, описанных около оснований, 5 *см* и 12 *см*. Найти радиус описанного шара.

25. Около шара радиуса R описана правильная четырёхугольная усечённая пирамида, у которой двугранный угол при основании равен 45°. Определить её полную поверхность.

Цилиндр и шар.

26. В шар радиуса R вписан равносторонний цилиндр. На какие части делят поверхность шара основания цилиндра?

27. Вокруг шара описан цилиндр. Найти отношение их поверхностей и объёмов.

28. В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания относится к высоте, как $m : n$. Определить полную поверхность этого цилиндра, если поверхность шара равна S.

Конус и шар.

29. Высота конуса h, образующая l. Найти радиус описанного шара.

30. Радиус шара 5 *см*. В шар вписан конус, радиус его основания 4 *см*. Найти высоту конуса.

31. Радиус шара 2 *м*. В него вписан равносторонний конус. Найти полную поверхность и объём конуса.

32. Высота конуса 8 *м*; образующая 10 *м*. Найти радиус вписанного шара.

33. Найти отношение объёмов равностороннего конуса и вписанного в него шара.

34. В конус, у которого радиус основания r, а образующая l, вписан шар. Определить длину линии, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

35. Если около шара описан конус, у которого высота вдвое более диаметра шара, то объём и полная поверхность конуса вдвое более объёма и поверхности шара. Доказать.

36. Около шара радиуса r описан конус, наибольший угол между образующими которого прямой. Определить полную поверхность конуса.

37. Высота конуса 20 *см*, образующая 25 *см*. Найти радиус вписанного полушара, основание которого лежит на основании конуса.

38. Высота конуса 9 *см*, радиус основания 12 *см*. Найти радиус вписанного в конус сегмента, имеющего с ним общее основание.

Усечённый конус и шар.

39. Радиусы оснований усечённого конуса 3 *м* и 4 *м*; высота 7 *м*. Найти радиус описанного шара.

40. Радиус шара 10 *см*. В него вписан усечённый конус. Радиусы оснований конуса 6 *см* и 8 *см*. Найти его высоту. (Два случая.)

41. Вокруг шара описан усечённый конус, радиусы оснований которого r и R. Найти радиус шара.

42. Около шара описан усечённый конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°. Доказать, что его боковая поверхность вдвое более поверхности шара.

43. Определить боковую поверхность и объём усечённого конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 *см*, а радиус шара 6 *см*.

Шаровые сектор и сегмент. Шар.

44. Радиус сферического сектора R, дуга в осевом сечении 60°. Найти радиус вписанного в него шара и длину окружности, по которой они касаются.

45. В сферический сектор вписаны два взаимно касающихся шара, радиусы которых 1 *дм* и 3 *дм*. Найти радиус данного сектора.

46. Даны четыре равных шара радиуса R, из которых каждый касается трёх других. Найти радиус шара, касательного ко всем данным шарам. (Два случая.)

47. Полная поверхность данного шарового сегмента в m раз более поверхности вписанного в него шара. Определить высоту сегмента, зная радиус R его сферической поверхности ($m = 2$).

48. Объём данного шарового сегмента в m раз более объёма вписанного в него шара. Определить его высоту по радиусу R его сферической поверхности ($m = 2$).

49. В шаровой сектор с углом в осевом сечении в $120°$ вписан равносторонний конус. Вершина конуса находится на сферической поверхности сектора, а основание конуса опирается на коническую поверхность сектора. Найти отношение объёмов конуса и сектора.

§ 24. Тела вращения.

Цилиндр, конус и усечённый конус.

1. Квадрат со стороной a вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведённого через её конец. Определить объём и поверхность полученного тела.

2. Квадрат со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна его стороне и отстоит от неё на длину стороны. Требуется: 1) определить объём и поверхность полученного тела; 2) определить, в каком отношении объём, образуемый вращением квадрата, разделится поверхностью, которую опишет его диагональ.

3. Равносторонний треугольник вращается вокруг перпендикуляра к стороне, проведённого через её конец. Как относятся между собой поверхности, описываемые сторонами треугольника?

4. Равносторонний треугольник вращается сначала вокруг стороны, а потом вокруг параллели к стороне, проведённой через вершину. Во второй раз получаются объём и поверхность, вдвое бóльшие, чем в первый раз. Доказать.

5. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и удалена от неё на расстояние, равное апофеме треугольника. Определить объём и поверхность полученного тела.

6. Одна из сторон a равностороннего треугольника продолжена на равную ей длину, и через конец продолжения проведён перпендикуляр к нему. Определить объём и поверхность тела, которое получится, если вращать треугольник вокруг этого перпендикуляра.

7. Высота равностороннего треугольника продолжена за вершину на свою длину, и через конец продолжения проведён перпендикуляр к нему. По стороне a определить объём и поверхность тела, образуемого вращением треугольника вокруг этого перпендикуляра.

8. Стороны квадрата служат сторонами равносторонних треугольников, построенных снаружи, и образовавшаяся фигура вращается вокруг прямой, соединяющей наружные вершины двух противоположных треугольников. Сторона квадрата равна a. Определить объём и поверхность полученного тела.

9. По стороне a правильного шестиугольника определить объём и поверхность тел, образуемых его вращением: 1) вокруг диаметра; 2) вокруг апофемы.

10. По стороне a правильного шестиугольника определить объём и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг стороны.

11. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту вершину. Определить объём и поверхность тела вращения.

12. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от неё на длину апофемы. Определить объём и поверхность полученного тела.

13. Прямоугольный треугольник с катетами 5 *см* и 12 *см* вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 *см*. Определить объём и поверхность тела вращения.

14. Прямоугольный треугольник с катетами 15 *см* и 20 *см* вращается вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведённого через вершину большего острого угла. Определить объём и поверхность тела вращения.

15. Треугольник со сторонами в 9 *см*, 10 *см* и 17 *см* вращается вокруг высоты, проведённой из вершины его меньшего угла. Определить объём и поверхность полученного тела.

16. Треугольник со сторонами 8 *см* и 5 *см*, заключающими угол в 60°, вращается вокруг оси, проходящей через вершину этого угла перпендикулярно к меньшей из его сторон. Определить объём и поверхность тела вращения.

17. Объёмы, образуемые вращением параллелограмма последовательно вокруг двух смежных сторон, обратно пропорциональны этим сторонам. Доказать.

18. Ромб, площадь которого равна Q, вращается вокруг стороны. Определить поверхность полученного тела.

19. 1) Ромб со стороной a и острым углом в 60° вращается вокруг оси, проведённой через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определить объём и поверхность тела вращения.

2) Такая же задача для угла в 45°.

20. Равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен 45° и боковая сторона равна меньшему основанию, вращается вокруг боковой стороны. По её длине a определить объём и поверхность тела вращения.

21. В полукруг радиуса R вписана трапеция так, что её нижним основанием служит диаметр этого круга, а боковая сторона стягивает дугу в 30°. Определить объём и поверхность тела, образуемого вращением этой трапеции вокруг радиуса, перпендикулярного к её основанию.

22. AB — диаметр данной полуокружности радиуса R; BC — дуга, содержащая 60°. Проведены хорда AC и касательная CD, где D — точка на продолжении диаметра AB. Определить объём и поверхность тела, получаемого при вращении треугольника ACD вокруг оси AD.

Шар и его части.

23. На полуокружности радиуса R от конца её диаметра AB отложена дуга BMC в 60°, и точка C соединена с A. Определить объём и поверхность тела, которое образуется, если вращать вокруг AB фигуру, ограниченную диаметром AB, хордой AC и дугой BMC.

24. На полуокружности радиуса R от конца её диаметра AB отложена дуга BMC в 45°, из точки C проведена касательная, пересекающая продолжение диаметра AB в точке D. Фигура, ограниченная прямыми BD и CD и дугой BMC, вращается вокруг BD. Определить объём и поверхность полученного тела.

25. O — центр дуги AMC радиуса R; B — точка на продолжении радиуса OA; BC — касательная к дуге AMC; CD — перперпендикуляр на радиус OA. Фигура вращается вокруг оси OB. Определить расстояние OD, если поверхность, образуемая вращением дуги AMC, делит пополам объём, образуемый вращением треугольника OCB вокруг оси OB.

26. AMC, CND и DPB — последовательные трети полуокружности с диаметром AB и центром O. Проведены радиусы OC и OD и хорды AC и AD, и фигура вращается вокруг диаметра AB. Доказать, что фигурами $ACND$ и $OCND$ будут описаны равные объёмы, составляющие каждый половину объёма шара.

27. Круговой сегмент вращается вокруг параллельного хорде диаметра. Доказать, что полученный объём равен объёму шара с диаметром, равным хорде сегмента.

28. 1) AOB — квадрант с центром O и радиусом R; AMC — дуга, содержащая 60°; AD — касательная, причём D точка её пересечения с продолжением радиуса OC. Фигура, ограниченная отрезками AD и CD и дугой AMC, вращается вокруг радиуса OB. Определить объём и поверхность полученного тела.

2) Такая же задача для дуги AMC, равной 45°.

Теоремы Гюльдена.

29. Проверить обе теоремы Гюльдена для случаев вращения:

1) прямоугольника вокруг одной из его сторон;

2) ромба со стороной a и высотой h вокруг одной из его сторон;

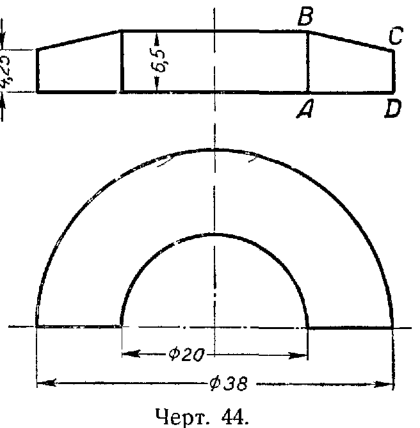
3) правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через вершину, параллельно основанию;

4) прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

5) прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы.

30. Поперечное сечение железного кольца — квадрат со стороной $a = 4$ *см*; средний диаметр кольца $d = 80$ *см* и удельный вес его 8,6. Найти вес кольца.

31. Спасательный круг, поперечное сечение которого — окружность, можно рассматривать как тело, получившееся от вращения круга вокруг некоторой оси. Диаметр сечения $d = 12$ *см*; внешний диаметр спасательного круга $D = 75$ *см*. Вычислить поверхность спасательного круга и его объём.



Черт. 44.

32. Паровозное депо имеет в плане вид полукольца (черт. 44), внутренний диаметр которого равен 20 *м*; ширина полукольца 9 *м*; в поперечном сечении депо имеет вид прямоугольной трапеции $ABCD$, параллельные стороны которой равны 4,25 *м* и 6,5 *м*. Найти объём депо.

33. Стороны треугольника 9 *см*, 10 *см* и 17 *см*. Треугольник вращается около большей своей высоты. Определить объём и поверхность тела вращения.

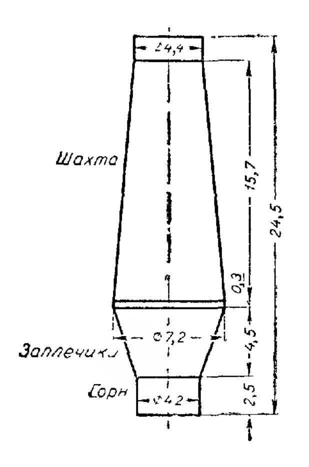
34. Доказать, что объёмы, полученные при вращении треугольника вокруг основания и вокруг прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника, относятся, как 1 : 2.

§ 25. Смешанный отдел.

1. На чертеже 45 дан внутренний разрез доменной печи; размеры даны в метрах. Определить объём горна, заплечиков, шахты, состоящей из трёх частей, и объём всей печи.

2. Плоскость, проведённая в пирамиде параллельно основанию, делит её боковую поверхность на части, отношение которых равно 4 : 5, считая от вершины. В каком отношении делится этой плоскостью высота?

3. Диагонали прямого параллелепипеда равны 9 *см* и $\sqrt{33}$ *см*; периметр его основания равен 18 *см*; боковое ребро равно 4 *см*. Определить полную поверхность и объём этого параллелепипеда.



Черт. 45.

4. В шар радиуса R вписан куб, и на его гранях построены правильные пирамиды с вершинами на поверхности шара. Определить объём образовавшегося многогранника и указать его отношение к объёму шара.

5. Полная поверхность конуса разделена пополам сечением, параллельным основанию. Радиус основания равен R, а образующая l. Определить верхний отрезок образующей ($R = 1$, $l = 8$).

6. Около шара описана правильная четырёхугольная усечённая пирамида, у которой стороны оснований относятся как $m : n$. Найти отношение её объёма к объёму шара.

7. Если в правильной четырёхугольной призме боковое ребро равно половине диагонали основания, то полная поверхность такой призмы равновелика правильному восьмиугольнику, построенному на стороне её основания. Проверить это: 1) с помощью вычисления; 2) без вычисления.

8. В прямом параллелепипеде точка пересечения его диагоналей отстоит от плоскости основания на 3 *см*, от боковых граней на 2 *см* и 4 *см*; периметр основания равен 30 *см*. Определить полную поверхность и объём параллелепипеда.

9. Для шлифовки мелких костяных изделий требуется сделать из полукотельного железа барабан, имеющий форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания в 200 *мм* и длиной в 800 *мм*. При работе барабан загружается на 45% объёма.

Определить количество железа, потребное для изготовления пяти таких барабанов, и вес изделий, шлифуемых одновременно в них, принимая удельный вес кости равным 1,2.

10. Правильная шестиугольная чугунная призма высверлена по оси. Длина её 4,8 *м*; удельный вес 7,25. Диаметр цилиндрического отверстия 32 *см* и сторона основания 32 *см*. Найти вес призмы.

11. Если плоскость, проходящая через гипотенузу прямоугольного треугольника, составляет с катетами углы в 30° и 45°, то с плоскостью треугольника она составляет угол в 60°. Доказать.

12. Около шара радиуса R описан усечённый конус, объём которого в m раз больше объёма шара. Определить радиусы его оснований.

13. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя рёбрами углы в 60°, то с третьим ребром она образует угол в 45°. Доказать.

14. Поверхность шара, вписанного в данный конус, равновелика его основанию. Требуется определить: 1) как относится поверхность этого шара к боковой поверхности конуса: 2) какую часть объёма конуса составляет объём шара.

15. Определить объём правильной четырёхугольной пирамиды, если боковое ребро равно b, а плоский угол при вершине 36°.

16. Как относится объём конуса, описанного около правильного тетраэдра, к объёму шара, вписанного в этот тетраэдр?

17. Основанием пирамиды служит ромб со стороной в 25 *дм* и меньшей диагональю 30 *дм*; высота пирамиды проходит через вершину тупого угла основания и равна 32 *дм*. Определить полную поверхность этой пирамиды.

18. Луночка, ограниченная полуокружностью и дугой в 120°, вращается вокруг прямой, соединяющей середины её дуг. Хорда луночки равна a. Определить поверхность и объём полученного тела.

19. В равносторонний конус вписан полушар так, что большой круг полушара находится в плоскости основания конуса. В каком отношении окружность касания делит боковую поверхность полушара и боковую поверхность конуса?

20. Основанием правильной четырёхугольной пирамиды служит квадрат, вписанный в основание шарового сегмента. Высота пирамиды и сегмента совпадают. Радиус шара $R = 6{,}5$ *м*, высота сегмента $h = 5$ *м*. Найти боковую поверхность пирамиды.

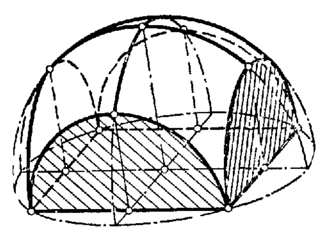
21. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями, проведёнными через середины каждых трёх сходящихся рёбер. Определить объём и поверхность полученного многогранника.

22. В равносторонний конус с образующей a вписан шар, а в него вписан куб. Определить ребро куба.

23. В данной правильной треугольной призме боковое ребро равно стороне основания a. Определить площадь сечения, проведённого через сторону основания под углом 60° к плоскости основания.

24. В правильном тетраэдре соединены между собой центры боковых граней. Определить, во сколько раз площадь полученного треугольника менее площади основания.

25. Секущая ACD, проведённая через центр окружности, равна 40 *см*; касательная $AB = 20$ *см*. Определить объём и поверхность тела, образуемого вращением вокруг AD фигуры, ограниченной прямыми AB и AD и дугой BMD.



Черт. 46.

26. Около шара радиуса r описан конус, у которого боковая поверхность относится к поверхности шара, как 3 : 2. Определить радиус основания.

27. В основание полушара вписан квадрат. Через стороны квадрата проведены плоскости, перпендикулярные к плоскости основания полушара (черт. 46). Эти плоскости отсекают от полушара четыре сферических полусегмента. Оставшаяся часть даёт часто встречающуюся форму свода. Сторона квадрата $a = 6{,}5$ *м*. Вычислить объём, занимаемый сводом.

28. В основание полушара вписан прямоугольник со сторонами a и b. Через стороны прямоугольника проведены четыре перпендикулярные к основанию плоскости, отсекающие от полушара четыре части (полусегменты). Найти объём оставшейся части.

29. По сторонам a и b прямоугольника определить объём и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг оси, проходящей через вершину параллельно диагонали.

30. По сторонам a и b прямоугольника определить объём и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг перпендикуляра к диагонали, проведённого через её конец.

31. Треугольник, площадь которого равна 36 $см^2$, вращается вокруг одной из сторон. Объём полученного тела 192π $см^3$, а его поверхность 216π $см^2$. Определить стороны треугольника и указать, какая из них служила осью.

32. В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде даны стороны оснований a и b и высота h. Определить объём её части, заключённой между боковой гранью и параллельной ей плоскостью, проведённой через сторону верхнего основания.

33. Треугольник, стороны которого относятся между собой, как 13 : 14 : 15, вращается вокруг средней стороны. В полученное

тело вращения вписан шар. Как относится объём шара к объёму тела вращения?

34. Прямоугольник со сторонами a и b перегнут по диагонали так, что плоскости треугольников образовали прямой двугранный угол. Определить расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на ребре двугранного угла.

35. Пусть будет V, V_1 и V_2 объёмы тел, полученных вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы и катетов. Доказать, что $\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}$.

36. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=c$ и острым углом в 15°. Если боковые грани C_1CAA_1 и C_1CBB_1 развернуть в одну плоскость и в ней провести линии C_1A и C_1B, то они образуют прямой угол. Определить объём и боковую поверхность этой призмы.

37. В конус вписан ряд шаров, из которых первый касается основания и боковой поверхности, а каждый следующий — боковой поверхности и предыдущего шара. Высота конуса равна 8 *см*, а радиус основания 6 *см*. К какому пределу стремится сумма объёмов вписанных шаров, если число их неограниченно возрастает?

38. В кубе с ребром a построен шар так, что его поверхность касается всех рёбер куба. Определить объём части шара, заключённой внутри куба.

39. В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна a, а боковое ребро $4a$. Определить площадь сечения, проведённого через диагональ призмы параллельно диагонали основания.

40. Для данной правильной четырёхугольной усечённой пирамиды построена равновеликая ей правильная четырёхугольная призма так, что центры их оснований совпадают, а боковые рёбра взаимно пересекаются. Стороны оснований усечённой пирамиды 2 *м* и 11 *м*. Требуется: 1) определить сторону основания призмы; 2) узнать, в каком отношении (считая сверху) делятся боковые рёбра точками их пересечения; 3) узнать, в каком отношении делятся линией пересечения боковые поверхности.

41. В шар вписан конус так, что его высота делится центром шара в среднем и крайнем отношении. Определить, во сколько раз объём шара более объёма конуса.

42. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, дано: $\angle BAD=60°$, $AB=8$ *см*, $AD=5$ *см* и $BC=CD$. Определить объём и поверхность тела, образуемого вращением этой трапеции вокруг стороны AD.

ОТВЕТЫ.

§ 1.

1. 1) Нет; нет; 2) да; да; нет.

2. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 3. 18,5 *см*^{2}. 4. $\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+4b^2}$.

7. 1) 8 *см*; 2) $a\sqrt{2}$. 8. Окружность, центром которой служит основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. 9. $\sqrt{\frac{Q}{\pi}+a^2}$. 10. Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная к её плоскости. 11. Плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и делящая его пополам.

12. 26 *дм*^{2}. 13. $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$. 14. $MA=\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $MB=4\sqrt{2}$; $MC=8$.

15. $OA=OB=OC=\sqrt{l^2-OM^2}$. 16. 9 *см*. 17. 4 *см*.

18. 1 *см*. 19. 1) $2\sqrt{2}$ *см*; 2) $\sqrt{2}$ *см*; 3) 45°. 20. 6,5 *см*.

21. 2,5 *см*; $KB=\sqrt{10,25}\approx 3,2$ (*см*).

22. 1) $\sqrt{f^2-a^2}$; 2) 37 *м*. 3) 8 *см* и 17 *см*. 23. 3,5 *дм*^{2}. 24. 2 *см*.

25. $\frac{ab}{a+b}$, если C и D лежат по одну сторону от плоскости M, и $\frac{ab}{a-b}$ (если $a>b$) или $\frac{ab}{b-a}$ (если $b>a$), если C и D лежат по разные стороны от плоскости M. При $a=b$ в 1-м случае имеем $\frac{a}{2}$, во 2-м ∞. 26. $\sqrt{2b^2-a^2}$.

27. 1) 56; 2) 20. 28. 1) *Указание.* Из произвольной точки наклонной опустить перпендикуляр на плоскость угла и показать, что его основание лежит на биссектрисе угла. 2) 18 *м*; 12 *м*.

§ 2.

1. $5\sqrt{2}$ *см*; 45°. 2. 241 *см*. 3. $\frac{h}{3}\sqrt{15}$. 4. 1,5*b*.

5. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 6. 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

7. 30°. 8. 60°. 9. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{6}$. 10. $3a$. 11. 35° или 115°.

§ 3.

1. 1) 2,6 *м* или $\approx$5,5 *м*; 2) $\approx$3,9 *м*. 2. 1) 117 *см*, 2) 9 *м*. 3. 10,5 *см*. 4. 6 *см*. 5. 3 *см*. 6. 36 *см* или 44 *см*. 7. 14 *дм*. 8. $2a$. 9. 12 *см*. 10. $\sqrt{a^2+b^2}$.

11. 1) Через данную точку провести плоскость, пересекающую данную плоскость, и в ней провести прямую, параллельную линии пересечения двух плоскостей. Задача имеет бесконечно много решений. 2) Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, и через нее произвольную плоскость. Задача имеет бесконечно много решений.

12. *Указание.* Задача имеет бесконечно много решений. 13. $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$.
14. 28 *см*. 15. $\frac{a(b+c)}{b}$. 16. 3 *см*. 17. 3,5 *см*. 18. 19 *см* и 17 *см*.
19. 5 *см* и 3 *см*. 20. 6 *дм*. 21. 25 *см* и 39 *см*. 22. $\sqrt{c^2-b^2+a^2}$.
23. 8 *см*. 24. $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. 25. $\frac{ab}{4}$. 26. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. 28. $\frac{a}{2}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})$.
29. 6 *дм*. 30. 1) 120 *см*; 2) 45 *см*. 31. 2 *м*. *Указание.* Соединить середину перпендикуляра с концами наклонной. 32. $\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$; $\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.
33. 5 *см*; 9 *см*; 12 *см*. 34. 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 2) $\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc}=25$.
35. $\frac{d}{h}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}$; $\frac{a(h+d)}{h}$. 36. $KB=BL=LD_1=D_1K=\frac{a}{2}\sqrt{5}$; $BD_1=a\sqrt{3}$; $KL=a\sqrt{2}$; ромб. 37. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 38. 1) 63 $дм^2$; 2) $3a^2$.

§ 4.

1. 1) 6 *дм*; 2) 10 *см*. 2. $a\sqrt{2}$. 4. 30°. 5. 1) 110°; 2) $2a$. 6. 1) 7 *см*; 2) $2a$; 4. 7. 5 *дм*. 8. 8 $см^2$; 4 *см*. 9. 13 *см*. 10. 1) 3,36 *см*; 2) 4. 11. $2a$. 12. 7,3 *см*. 13. 1. 14. Плоскость, перпендикулярная к данной плоскости и проходящая через данную прямую. 15. 1) *Указание.* См. учебн. Киселёва, ч. II, § 43 и 36. 2) Или одна, или бесконечно много плоскостей. 16. 109 *см*.
17. 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $\sqrt{a^2+c^2}$; $\sqrt{b^2+c^2}$; 2) $\frac{a}{2}$. 18. 3 $дм^2$.
19. 460,8 $см^2$.

§ 5.

1. a) 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет. b) 1) Нет; 2) нет; 3) да.
3. $55° \leqq x \leqq 95°$. 4. $\sqrt{6}$. 5. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 7. 60°.
8. 90°. 9. 45°. 10. $\sqrt{2}$. 11. 3 *дм*. 12. 7 *см*.

§ 6.

1. $a\sqrt{2}$. 2. $DA=DB=DC=CB=CA=AB=a\sqrt{2}$.
3. $a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$. 4. 1) 3; 2) 6. 5. $\frac{4}{3}a^2$.
6. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; 2) $\sqrt{6}$. 7. $a(\sqrt{6}-2)\approx 0{,}45a$. 8. $a(2-\sqrt{2})\approx 0{,}6a$.

§ 7.

1. 1) 3; 2) 7; 3) 11; 4) 17; 5) 29.
2. 1) 13 *м* и 9 *м*; 2) $\sqrt{277}\approx 16{,}6$ (*см*) и 15 *см*. 3. 8 *см* и 10 *см*.
4. 7 *см* и 5 *см*. 5. $a\sqrt{2}$ и $2a$.

6. 1) 5 *см* и 7 *см*; 2) 4 *м* и $\sqrt{12} \approx 3{,}464$ (*м*). 7. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
8. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 10. 1) 2 $м^2$, 2) 40 *см* и 9 *см*.
11. 2 $м^2$ и 3 $м^2$. 12. 273 $см^2$ и 175 $см^2$. 13. 1872 $см^2$.
14. $\frac{Q}{a}$. 16. 4; 10; 0; $n(n-3)$. 17. 30; 15; 10.
18. 1) Параллелограммы; 2) 2; 3) на три части; 4) призму.
19. $\frac{n(n-3)}{2}$. 20. 1) 22 *см*; 2) 9 *см*. 22. $Q\sqrt{2}$.
23. $2a$ и $a\sqrt{5}$, $a^2\sqrt{3}$ и $2a^2$. 24. $3a^2$.
25. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \approx 6{,}928$ $м^2$. 26. 12. 27. 120°.
28. $Q\sqrt{2}$. 29. 144 $см^2$. 30. 4,5 *см*.
31. 7,5 *см*. 32. 53°49′. 33. 12 *см*.

§ 8.

1. 2 *м*.
2. а) 1) 29 *см*; 2) $11\frac{1}{2}$ *дм*; 3) $\sqrt{7\frac{5}{6}} \approx 2{,}8$ (*м*); b) 1) $2l^2$; 2) $3Q\sqrt{2}$.
3. 1) 1464 $см^2$; 2) 6 *см*; 14 *см*; 16 *см*. 4. 124 $дм^2$.
5. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. 6. 188 $м^2$. 7. 1416 $см^2$.
8. $220+24\sqrt{3} \approx 260$ ($см^2$); 70 $см^2$. 9. 288 $см^2$.
10. $2\sqrt{M^2+N^2}$. 11. 2 *м*. 12. 4 *м*.
13. 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$
14. $192+32\sqrt{6} \approx 270$ ($см^2$).
15. 6 *см* и 3 *см* или 4 *см* и 7 *см*. 16. $3l^2\sqrt{3}$.
17. 4980 $см^2$. 18. 9 $м^2$ и 1 *м*. 19. 34 *см*, 20 *см*, 18 *см*.
20. 25 *см*, 25 *см*, 30 *см*, 24 *см*. 21. 906 $см^2$ и 240 $см^2$.
22. 3 $м^2$. 23. $10R^2$. 24. 5 *см*.
25. 1) 144 $см^2$; 2) 2016 $см^2$. 26. 1) 2 *см*; 2) 576 $см^2$.
27. 1) $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$; 2) b, $\sqrt{b^2+2a^2}$, $\sqrt{4a^2+b^2}$, $a\sqrt{2b^2-a^2}$, $ab\sqrt{2}$.
28. $ab(\sqrt{2}+1)$. 29. 492 $см^2$.

§ 9.

1. 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$.
2. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$, 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$.
3. 9 *см*. 4. 5 *см* и 6 *см*. 5. 12 *см*. 6. 3 *см*.
7. 12 *см*. 8. $\frac{ah}{a+h}$. 9. 14 $м^2$.

10. ah; $\frac{1}{4}a\sqrt{12h^2+3a^2}$. 11. $\frac{1}{4}a\sqrt{3b^2-a^2}$. 12. $\frac{1}{4}Q$.

13. 25 кв. ед.; 100 кв. ед.; 225 кв. ед.

14. $\frac{Q}{n^2}, \frac{4Q}{n^2}, \frac{9Q}{n^2}, \ldots, \frac{(n-1)^2 Q}{n^2}$; 16, 64, 144, ...

15. 245 *см*^{2}. 16. $\frac{h}{\sqrt{2}}$; $\frac{h}{\sqrt{3}}$; $\frac{h}{\sqrt{5}}$; $\frac{h}{\sqrt{n}}$.

17. 1) 11 *м*; 2) 35 *см*. 18. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}=\frac{3}{7}$. 19. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

§ 10.

1. 1) $\frac{3a}{4}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $a\sqrt{4h^2+a^2}+a^2$;

3) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

2. 288 *см*^{2}. 3. $2r(k+r)\sqrt{3}$. 4. $\frac{1}{2}a$.

5. 1,8 *м* и 4 *м*. 6. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{15}$. 7. $3a^2$.

8. $\sqrt{-2h^2+\sqrt{4h^4+P^2}}$. 9. 16 *см* и 6 *см* или 12 *см* и 8 *см*.

10. $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ (*см*). 11. $3a^2$. 12. $5R^2$.

13. $\frac{3}{2}a^2$. 14. 26 *м*^{2}. 15. 768 *см*^{2}.

16. $22+\sqrt{136}\approx 33{,}66$ (*м*^{2}). 17. 540 *см*^{2}.

18. 448 *см*^{2}. 19. 6 *дм*^{2}. 20. 10 *м*^{2}.

21. $\frac{1}{2}a^2(6+\sqrt{7})\approx 4{,}3a^2$. 22. $\frac{1}{4}a^2(\sqrt{3}+\sqrt{15})\approx 1{,}40a^2$.

§ 11.

1. 9 *см*. 2. 1 *дм*.

3. $\sqrt{c^2-\frac{1}{3}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$.

4. 56 *см* и 24 *см*. 5. 10; $n(n-3)$. 6. 6 *см*.

7. 2 *см* и 10 *см*. 8. $\sqrt{2}$. 9. $1\frac{8}{9}$ *см*; $6\frac{2}{9}$ *см*; $5\frac{1}{7}$ *см*.

10. $a-b$. 11. 2 *см*. 12. $20\sqrt{2}\approx 28$.

13. $\frac{1}{4}(a^2-b^2)$. 14. 12 *см*^{2}. 15. $\frac{1}{2}(Q-q)$.

16. 24 *м*^{2}, 30°. 17. 14 *см*^{2}. 18. 39 *м* и 51 *м*.

19. 16 *см*^{2}. 21. 32 *м*^{2}.

22. $\dfrac{h\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{Q}+\sqrt[4]{q}}$. 23. 50 $м^2$.

24. $\frac{1}{9}(Q+4q+4\sqrt{Qq})=8$; $\frac{1}{9}(4Q+q+4\sqrt{Qq})=18$.

§ 12.

1. 168 $м^2$. 2. 54 $дм^2$. 3. 36 $см^2$.

4. 1) $\frac{3}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+\frac{(a-b)^2}{3}}+\frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}$;

2) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}+a^2+b^2$;

3) $\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}+\frac{3}{2}(a^2+b^2)\sqrt{3}$.

5. $\frac{ab}{a+b}$. 6. 1) 20 *см* и 10 *см*; 2) 2 *см* и 12 *см*.

7. $\sqrt{3a^2-\frac{4S}{\sqrt{3}}}$. 8. $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{P^2-(Q-q)^2}$.

9. $\frac{1}{4}(a+b)[4c^2+\sqrt{4c^2+3(a-b)^2}]=16$. 10. 1920 $см^2$.

11. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2-a^2)}{2b+a}}$. Задача имеет решение, если $a<b\sqrt{2}$.

12. 5 : 9.

§ 13.

1. 5 *м* 2. $\frac{\pi Q}{4}$. 3. 36 $см^2$.

4. 3 *дм*. 5. $40\sqrt{3}\approx 70$ ($см^2$).

6. 90°. 7. $\frac{1}{4}a^3$. 8. 3 *дм*.

9. 10 *м*. 10. 1 *м* и 3 *м*. 11. Около 912 *т*.

12. 4 *см* и 14 *см*. 13. Около 40 $м^2$. 14. Около 116 $м^2$.

15. Около 77 *м*. 16. $2\pi ab$. 17. π^2.

18. πh^2. 19. R. 20. πQ.

21. 1) π; 2) $H=\frac{3}{2}R$. 22. $\frac{3}{2}P=75$ $см^2$. 23. 1) 6 *см*; 2) $H=R$.

24. 1) 75 *см*; 2) $\approx 26{,}2$ (*см*). 25. $\pi M+2Q$.

26. 1) $H=2R(2\pm\sqrt{3})$; 2) $H=2R(2+\sqrt{5})$. 27. $\pi:3$.

28. Расстояние секущей плоскости от плоскости основания равно: $\frac{1}{2}(H\pm\sqrt{H^2-R^2})$; должно быть $H\geqq R$.

29. $\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. 30. $2\pi a^2\approx 628$ ($см^2$).

§ 14.

1. 5 *м*. 2. $\frac{1}{2}L$. 3. R^2. 4. 45°.

5. $\frac{H\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7H$. 6. 1) $\frac{1}{4}\pi R^2$; 2) $\pi R^2 \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2}$. 7. 500

8. R^2. 9. $2H^2$. 10. 1) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $100\sqrt{2} \approx 141{,}4$ (*см*²).

11. $\frac{3}{4}l$. 12. 3 *см*. 13. $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$.

14. $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 15. 80π. 16. 24π.

17. $\approx 25{,}3$ *м*². 18. ≈ 38 листов. 19. $\approx 17{,}1$ *м*.

20. 1) 240π *см*²; 2) $286{,}72\pi$ *м*². 21. 11 *см*; 11 *см*; 8 *см*

22. $2:1$. 23. 1) $1:2:3$; 2) πH^2. 24. $2:3$.

25. Радиус основания равен большей части образующей, разделённой в среднем и крайнем отношении.

26. 1) Образующая равна диаметру основания (равносторонний конус); 2) радиус основания равен большей части образующей, разделённой в среднем и крайнем отношении.

27. 1) 216°; 2) $360° \cdot \frac{R}{L}$; в случае равностороннего конуса 180°; 3) a) $\approx 255°$; b) $\approx 312°$.

28. 1) 30°; 2) 1 *м*. 29. 1) 25 *см*²; 2) 11 *см*²; 3) $\frac{\pi M\sqrt{15}}{3}$.

31. $\pi:\sqrt{7} \approx 1{,}2$. 32. 20 *см*.

33. $\frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 2nHL}}{2n}$; $\frac{3}{4}H$, $\frac{1}{4}H$.

§ 15.

1. 5 *м*. 2. $R - r$. 3. 20 *см*. 4. $2H$.

5. a и $2a$. 6. 30 *дм*². 7. 1) 9 *м*²; 2) $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$.

8. 9 и 16. 9. $\frac{1}{2}$, считая от большего основания.

10. 4 *см*. 11. $35\pi \approx 110$ *дм*². 12. $2\pi(R^2 - r^2)$. 13. 100π *см*².

14. 1) 15 *м*; 2) 28 *дм* и 12 *дм*. 15. $\approx 1{,}04$ *м*². 16. $\approx 0{,}942$ *м*².

17. Около 4,3 *кг*. 18. ≈ 7025 *см*². 19. 1) 5 *см*; 2) a) 5 *см*; b) 9 *см*.

20. $2\pi F$. 21. $\frac{SR^2}{R^2 - r^2}$. 22. $\frac{2Rr}{R+r}$.

23. 1) $\pi(R^2 - r^2)\sqrt{2}$; 2) $2(Q - q)$. 24. 1) $\frac{SH}{L\pi}$; 2) $\frac{1}{\pi}\sqrt{S^2 - (Q-q)^2}$.

25. $1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45$ (*см*).

§ 16.

1. 24 $м^2$. 2. 6 *см*.
3. 1) $\approx 8{,}4$; 2) $\approx 9{,}57$ *см*; 3) ≈ 71 *кг*. 4. 1) $\frac{1}{9} l^3 \sqrt{3}$, 2) $\frac{1}{6} S \sqrt{\frac{1}{6} S}$.
5. 1) 3 *см*; 2) 25 *см*; 3) 6 лин. ед. 6. 1 : 8; 1 : 27; 1 : 64; 1 : n^3.
7. 1,8. 8. $\approx 2{,}29$ *м*. 9. $\approx 0{,}11$ *мм*. 10. $\approx 0{,}46$ *т*.
11. $\approx 1{,}23$ *м*; $\approx 0{,}94$ *м*; $\approx 0{,}67$ *м*. 12. $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$; $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$; $\sqrt[3]{n}$.
13. Вдвое. 14. 1) 30 *м*; 2) 3 *см*.
15. 1) 4500 $см^3$; 2) $\frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. 16. 1) 6 $м^3$; 2) $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$.
17. $\frac{1}{8} l^3 \sqrt{2}$. 18. $\frac{abS}{4(a+b)}$. 19. 1) 360 $см^3$; 2) 36 $м^3$.
20. 60 $см^3$. 21. 780 $см^3$. 22. 1) 3 $м^3$; 2) $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$.
23. 525 $см^3$; 290 $см^2$. 24. 10 *см*; 144 $см^2$; $\frac{135\sqrt{3}}{2} \approx 116{,}9$ ($см^3$).
25. 17 280 $см^3$. 26. 1) $\frac{1}{4} a^2 b \sqrt{3}$; 2) $a^2 b$; 3) $1{,}5 a^2 b \sqrt{3}$.
27. 0,5. 28. Около 930 *кг*. 29. $\approx 192{,}72$ *кг* ≈ 190 *кг*.
30. 1) 3 $м^3$; 2) $8\sqrt{2} \approx 11{,}3$ ($см^3$) или 32 $см^3$.
31. 1) $\frac{1}{8} a^3$; 2) $Q \cdot \sqrt{\frac{Q}{3}}$. 32. $2\frac{1}{4} R^2$. 33. 6 $м^3$. 34. $1\frac{1}{2} a$.
35. 6048 $м^3$. 36. 105 $м^3$.
37. 1) 48 $см^3$; 2) 3,4 *м*; 3,4 *м* и 3,2 *м*. 38. 12 $см^3$.
39. 35 200 $м^3$. 40. 3 человека. 41. 7320 $см^3$.
42. R^3. 43. ≈ 305 $м^3$. 44. 200 $дм^3$.
45. 1) $\sqrt{2}$ $м^3$; 2) $a^2\sqrt{2c^2 - b^2} = 450$. 46. $\frac{1}{2} a^3 \sqrt{2}$.
47. $\frac{1}{2} abc\sqrt{2}$; $(a+b)c\sqrt{3}$; 45°. 48. $\frac{1}{2} a^3$.
49. 2 *см*. 50. 1) 45 $см^3$; 2) 100 $м^3$.
51. $\frac{1}{8} a^3 \sqrt{2}$; $\frac{1}{2} a^2 (2 + \sqrt{2})$. 52. $\frac{1}{8} ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}$.
53. 1) 3060 $м^3$; 2) 1 $м^3$. 54. 2 $м^3$. 55. am^2.
56. Около 0,75 *мм*. 57. Около 0,95. 58. $\approx 2{,}45$ $мм^2$.
59. $\approx 8{,}4$ *мм*. 60. ≈ 4500 *л*. 61. ≈ 630 $см^3$.
62. πa^3. 63. $4\pi\sqrt{2} \approx 18$.
64. 1) 1 : 8; 1 : 27; ...; 1 : n^3; 2) как квадраты радиусов; как высоты; 3) в 2 раза; в n раз; 4) в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ (раза); в $\sqrt{n}$ раз; 5) 4 лин. ед.
65. 1) $v_2 : v_1 = 1 : 2$; 2) $v_2 : v_1 = 1 : 8$.
66. 4 : 1. 67. $\frac{SC}{4\pi}$. 68. 1) $\frac{a^3}{4\pi}$; 2) $\frac{3H^3}{4\pi}$.
69. $V_{I} : V_{II} = 1 : 2$; $S_{I} : S_{II} = 1 : 1$.
70. $\frac{3}{4} \pi a^3$. 71. ≈ 200 *кг*. 72. ≈ 39 *кг*.
73. ≈ 61 *кг*. 74. $\approx 4{,}0$ *кг*. 75. 240 *г*.

§ 17.

1\. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$, 2) $\frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2-a^2)}$.

2\. 32 $м^3$. 3. 7 *см*.

4\. 1) $h(k^2-h^2)\sqrt{3}$, 2) $\frac{1}{6}\sqrt{Q(S^2-Q^2)}=12$. 5. 1) $\frac{1}{6}b^3$; 2) $\frac{1}{24}a^2\sqrt{2}$.

6\. $a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$. 7. $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$.

8\. $\frac{1}{24}a^3\sqrt{2}$; в 2 раза меньше. 9. 1) 6 : 1; 2) 9 : 2.

10\. 1) $\frac{1}{12}a^3$; 2) $\frac{1}{3}h^3\sqrt{3}$. 11. 1) $\frac{3}{4}a^3$; 2) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}V}$; 60°. 12. 360 $м^3$.

13\. 120 $см^3$. 14. 48 $см^3$. 15. $\frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$.

16\. 420 $см^3$. 17. 1) 1800 $см^3$; 2) 16 $см^3$. 18. 60 $см^2$.

19\. 500 $см^3$. 20. $\frac{1}{6}abc$. 21. 1) 8 $см^3$; 2) 4 $м^3$.

22\. $\sqrt{11}$. 23. 400 $см^3$, 180 $см^2$. 24. $\frac{1}{3}$ $м^3$.

25\. 80 $см^3$. 26. 576 $см^3$. 27. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}\approx 0,8h$.

28\. 1 : 7 : 19 : 37 . 61. 29. $1:(\sqrt[3]{2}-1):(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})\approx 50:13:9$.

30\. 27 : 98. 31. 1 : 9; 1 : 27. 32. $16\pi\approx 50$.

33\. Около 10 *т*. 34. 72 воза. 35. $\approx 1,6$ *т*.

36\. $\approx 0,35$ *м*. 37. 9π $м^3\approx 28$ $м^3$. 38. 12π $см^3\approx 38$ $см^3$.

39\. 96π $см^2\approx 300$ $см^2$. 40. $\frac{C^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-C^2}$. 41. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(S^2-Q^2)Q}{\pi}}$.

42\. 200π $м^2\approx 628$ $м^2$. 43. 24π $см^3\approx 75$ $см^3$. 44. $\frac{1}{8}\pi l^3$.

45\. $\frac{7}{27}V$. 46. 1) $\sqrt{2}:\sqrt{3}\approx 0,8$; 2) $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{2}\approx 1,145$.

47\. 1) $\frac{3V}{\pi R}$; 2) $\frac{1}{3}M\sqrt{\pi Q}$, $\sqrt{\pi^2M^2+Q^2}$. 48. 25 : 36.

49\. $\approx 2,9$ $дм^3$. 50. $\frac{1}{2}R\sqrt[3]{4}\approx 0,8R$. 51. $\frac{\pi a^2}{108}\sqrt{6}$; $\frac{\pi a^2}{4}$.

52\. $\pi a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}\pi a^3$. 53. $\frac{1}{3}\pi bh^2$. 54. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

55\. 1) 4800π $см^3\approx 15$ $дм^3$; 1320π $см^2\approx 41$ $дм^2$; 2) $\frac{1}{4}\pi a^3$; $\frac{1}{2}\pi a^2(3+\sqrt{3})\approx 7,4a^2$.

56\. 1) 448π $см^3\approx 1,4$ $дм^3$; 216π $см^2\approx 6,8$ $дм^2$; 2) 800π $см^3\approx 2,5$ $дм^3$; 1080π $см^2\approx 34$ $дм^2$.

57\. 240π $см^3\approx 0,75$ $дм^3$, $84\pi\sqrt{3}$ $см^2\approx 4,6$ $дм^2$.

58\. $\frac{1}{2}\pi a^3$; $\frac{1}{2}\pi a^2(3+\sqrt{3})\approx 7,4a^2$.

§ 18.

1. 1) 1520 *л*; 2) 10 *м*. 2. ≈ 55 *т*. 3. $10\frac{1}{3}$ *м*^{3}.
4. 2325 *м*^{3}. 5. 1) 20 *м*^{2} и 45 *м*^{2}; 2) 5 *м*.
6. 1) 8 *м*^{2}; 2) 2 *см*^{2} и 8 *см*^{2}. 7. 128 *м*^{2} и 50 *м*^{2}.
8. 1900 *м*^{3}.
9. 1) $\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$;

2) $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$.

10. 1) $10\frac{1}{2}$ *м*^{2}; 2) 1900 *м*^{3}. 11. 109 *см*^{3}. 12. $\frac{1}{2}(a^3-b^3)$.
13. Объём средней части равен 28 *см*^{3}, объём боковой части равен 12 *см*^{3}.
14. 3 : 4. 15. abh. 16. $\frac{2}{3}abh$.
17. $4\sqrt{2}$ *м*; 37 *м*^{3}; 152 *м*^{3}. 18. $\frac{Qh\sqrt{Q}}{3(\sqrt{Q}-\sqrt{q})}$; $\frac{qh\sqrt{q}}{3(\sqrt{Q}-\sqrt{q})}$.
19. $\frac{VQ\sqrt{Q}}{Q\sqrt{Q}-q\sqrt{q}}$. 20. $\frac{7m^2+4mn+n^2}{7n^2+4mn+m^2}=\frac{73}{31}$. 21. $\approx 2\%$.
22. ≈ 1 *м*^{3}. 23. ≈ 49 *л*. 24. $\frac{1}{3}\pi(R^3-r^3)$.
25. $63\pi\approx 200$. 26. $84\pi\approx 264$ (*м*^{3}).
27. 1) 8 *см*; 2) 2 *м*; 5,5 *м*; 12,5 *м*; 3) 7 *см*. 28. 7 *см*.
29. 54 *см*^{3}. 30. 1) 457π *см*^{3}; 2) $\frac{7}{24}\pi R^3\sqrt{3}\approx 1{,}6R^3$.
31. $\frac{1}{3}\pi^2(R^3-r^3)$. 32. 10 *см* и 20 *см*. 33. 3020π *см*^{3}; $476\,\pi$ *см*^{2}.
34. 1) $R=4\,r$; 2) $r=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. r равно большей части R, разделённого в среднем и крайнем отношении.
35. 14 *см*. 36. 218π *см*^{3}; 386π *см*^{3}; 602π *см*^{3}.
37. 7 : 19 : 37. 38. $\frac{R^3-r^3}{R^3}$. 39. $\approx 1{,}05$.
40. $\frac{2}{3}\pi Rrh$.

§ 19.

2. ≈ 1312 тачек. 3. $\frac{1}{6}h\,[(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1]$ *м*^{3}. 4. $\approx 0{,}79$*т*.
5. ≈ 28 *м*^{3}. 6. 52,5 *дм*^{3}. 7. $\approx 53{,}4$ *дм*^{3}.
8. $\frac{1}{6}hh_1(a+b+c)=\frac{hh_1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}$. 9. 10 *см*.
10. $\frac{1}{2}a^2(b+c)$; $2a(b+c)$. 11. 1900 *см*^{3}; 1080 *см*^{2}. 12. 2) 3456 *см*^{3}.
13. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{3}(l+m+n)$; $a(l+m+n)$.

§ 20.

1. 1) $16\pi \approx 50$ (*м*²); 2) 3 : 4. 2. 2 *см*. 3. $\approx 4{,}8$ *см*.
4. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 5. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 6. 1) πR; 2 ≈ 785 *км*.
7. 12 *см*. 8. 12 *см*. 9. $24\pi \approx 75$ *м*.
12. 1) $\pi R\sqrt{3}$; 2) 4π *м*. 13. 3 *см*. 14. 8 *см*.
15. 36 *дм*². 16. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. 17. 5 *см*. 18. ≈ 67 *см*.

§ 21.

1. 1) $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}2$ (*м*³); 2) в 27 раз; в 64 раза. 2. Около 14 *см*.
3. 1) Около 39 *см*; 2) 6 *см*. 4. ≈ 168. 5. 1) 1000; 20 *см*; 2) 216.
6. Прибавка в весе у свинцового шара 0,0012 *г*, у стеклянного 2,8 *г*. Следовательно, опустится стеклянный шар.
7. 1) $33\frac{1}{3}$%; 2) $\approx 47{,}6$%. 9. ≈ 2148 *см*³. 10. 1866 *г* $\approx 1{,}9$ *кг*.
11. 10 *см* и 7 *см*. 12. $R\sqrt[3]{\frac{3\pi+1}{2\pi}}$. 13. $R\sqrt[3]{15} \approx 2{,}5R$. 14. ≈ 290 *см*.
15. 45π *см*³ и 243π *см*³. 16. 0,028. 17. $\frac{13}{24}$.
18. $635{,}5\pi \approx 2000$ (*м*³). 19. 5 : 16. 20. 3528π *см*³. 21. ≈ 62 *кг*.
22. ≈ 640 *см*³. 23. $\frac{1}{3}\pi R^3$. 24. $112{,}5\pi$ *дм*³. 25. $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$.
26. $\frac{1}{3}\pi R^3$, $\frac{2}{3}\pi R^3$ и $\frac{1}{3}\pi R^3$.
28. $12\frac{2}{3}\pi \approx 40$ (*м*³) или $144\frac{2}{3}\pi \approx 450$ (*м*³).
29. $34\,182\pi$ *см*³ ≈ 107 *дм*³. 30. 6 *см*.
31. В выражении объёма тела $V = \frac{1}{6}\pi a^3$ не входит радиус круга.

§ 22.

1. 1) 4 *м*²; 2) M; 3) $3\pi R^2$.
2. 1) $\approx 314{,}16$ *см*²; 2) $562{,}5\pi$ *м*³; 3) $\sqrt[3]{36\pi V^2}$.
3. 1) Увеличится в 16 раз и в 64 раза; в 25 раз и в 125 раз; 2) $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$; 3) $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$.
4. Большая поверхность равновелика сумме двух других.
5. 25π *м*². 6. 3) 3. 7. $S_ш : S_ц = \sqrt[3]{18} : 3 \approx 0{,}87$. 9. 400π *м*² или 1100π *м*².
10. $R(\sqrt{3}-1)$. 11. 910π *см*² ≈ 29 *дм*². 12. $\pi\sqrt{(r^2 - r_1^2 - h^2)^2 + 4r^2h^2}$.
13. $2R\frac{m-1}{m}$; $\frac{3}{2}R$. 15. $\pi(r^2 + h^2)$. 16. $\frac{21\pi Q}{4\pi - 3\sqrt{3}}$.
18. 1) 180π *см*²; 2) $3R$. 19. $2Q(4-\sqrt{2}) \approx 5{,}2Q$.
20. $\frac{1}{5}$. 21. 512π *см*² ≈ 16 *дм*². 22. ≈ 840 *м*².

§ 23.

1. $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. 2. 1) 7 *см*; 2) 3 *см*. 3. 8 *дм*. 4. 11 *м*.
5. $12R^2\sqrt{3} \approx 21R^2$. 6. 4 *м*. 7. 18 *см*. 8. 13 *см*.
9. $18R^2\sqrt{3}$; $6R^3\sqrt{3}$. 10. 1 : 2 : 3. 11. 1 : 5.
12. $\frac{b^2}{2h}$. 13. 3 *м*.
14. 1) $\frac{1}{4}a\sqrt{6}$; $\frac{1}{12}a\sqrt{6}$; 2) 1 : 3 : 9.
15. $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \approx 0,7a$; $\frac{1}{6}a\sqrt{6} \approx 0,4a$. 16. 1) $\frac{1}{3}h$; 2) $h(\sqrt{2}-1)$.
17. 8,1 *см*. 18. 54 $см^3$. 19. $1,5h$.
20. 1) $H = R$, 2) $H > R$; 3) $H < R$. 21. 2 *дм*. 22. 5 *дм*.
23. 5 *м*. 24. 13 *см*. 25. $56R^2$.
26. $S_{\text{сегм.}} = \pi R^2(2-\sqrt{2})$; $S_{\text{пояса}} = 2\pi R^2\sqrt{2}$.
27. 2 : 3 (в обоих случаях). 28. $\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$. 29. $\frac{l^2}{2h}$.
30. 8 *см* или 2 *см*. 31. 9π $м^2$; 3π $м^3$.
32. 3 *м*. 33. 9 : 4. 34. $2\pi r\frac{l-r}{l}$.
36. $\pi r^2(5\sqrt{2}+7) \approx 44r^2$.
37. 12 *см*. 38. 20 *см*. 39. 5 *м*
40. 2 *см* или 14 *см*.
41. $\sqrt{Rr}$. 43. 160π $см^2$; 532π $см^3$.
44. $\frac{1}{3}R$; $\frac{1}{3}\pi R\sqrt{3} \approx 1,8R$.
45. 9 *дм*. 46. $\frac{1}{2}R(\sqrt{6}\pm 2) \approx 2,22R$ и $\approx 0,22R$.
47. $\frac{4R}{m+1}$; $\frac{4}{3}R$. 48. $\frac{6R}{m+2}$; $\frac{3}{2}R$. 49. 9 : 64.

§ 24.

1. $\pi a^3\sqrt{2}$; $4\pi a^2\sqrt{2}$. 2. 1) $3\pi a^3$; $12\pi a^2$; 2) 4 : 5. 3. 1 : 2 : 3.
5. $\frac{1}{2}\pi a^3$; $2\pi a^2\sqrt{3}$. 6. $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$; $9\pi a^2$. 7. $1\frac{1}{4}\pi a^3$; $5\pi a^2\sqrt{3}$.
8. $\frac{1}{6}\pi a^3(3+2\sqrt{3})$; $\pi a^2(3+\sqrt{3})$.
9. 1) πa^3, $2\pi a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{7}{12}\pi a^3\sqrt{3}$; $3,5\pi a^2$. 10. $4,5\pi a^3$; $6\pi a^2\sqrt{3}$.
11. $3\pi a^3\sqrt{3}$; $12\pi a^2$. 12. $9\pi a^3$; $12\pi a^2\sqrt{3}$. 13. 280π $см^3$, 270π $см^2$.
14. 3400π $см^3 \approx 11$ $дм^3$; 1440π $см^2 \approx 45$ $дм^2$.
15. 504π $см^3 \approx 1,6$ $дм^3$; 504π $см^2 \approx 16$ $дм^2$.
16. $60\pi\sqrt{3}$ $см^3$; 120π $см^2$. 18. $4\pi Q$.
19. 1) $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$; $6\pi a^2$; 2) $\frac{1}{2}\pi a^3(\sqrt{2}+1)$; $2\pi a^2(2+\sqrt{2})$.
20. $\frac{1}{6}\pi a^3(5+3\sqrt{2})$; $3\pi a^2(1+\sqrt{2})$.

21. $\frac{1}{24}\pi R^3 (7+2\sqrt{3})$;
$\frac{1}{2}\pi R^2 \left(3{,}5+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\pi R^2 (7+\sqrt{6}+\sqrt{2})$.
22. $\frac{3}{4}\pi R^3$; $3\pi R^2$. 23. $\frac{7}{12}\pi R^3$; $2\frac{1}{2}\pi R^2$.
24. $\frac{1}{6}\pi R^3 (3\sqrt{2}-4)$; $\frac{1}{2}\pi R^2 (4-\sqrt{2})$. 25. $\frac{1}{3}R$.
28. 1) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; $1\frac{1}{2}\pi R^2 (2\sqrt{3}+1)$; 2) $\frac{1}{3}\pi R^3 (2-\sqrt{2})$;
$\frac{1}{2}\pi R^2 (4+3\sqrt{2})$.
30. $\approx 34{,}6$ *кг*. 31. $S\approx 75$ *дм*^{2}, $V\approx 22$ *дм*^{3}.
32. $V\approx 2200$ *м*^{3}. 33. ≈ 1580 *см*^{3} и ≈ 1580 *см*^{2}.

§ 25.

1. ≈ 35 *м*^{3}; ≈ 118 *м*^{3}; ≈ 457 *м*^{3}; ≈ 610 *м*^{3}. 2. $2:1$.
3. 104 *см*^{2}; 64 *см*^{3}. 4. $2\frac{2}{3}R^3$; $2:\pi\approx\frac{7}{11}$. 5. $\sqrt{\frac{l(R+l)}{2}}=6$.
6. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. 8. 260 *см*^{2}; 240 *см*^{3}. 9. 5,84 *м*^{2}; ≈ 224 *кг*.
10. $\approx 6{,}5$ *т*.
12. $\frac{1}{2}R(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3})$ и $\frac{1}{2}R(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3})$.
14. 1) $3:5$; 2) $\frac{3}{8}$. 15. $\frac{1}{6}b^3\sqrt{2\sqrt{5}-4}$. 16. $8:1$.
17. 24 *м*^{2}. 18. $\frac{5}{6}\pi a^2$; $\frac{\pi a^3}{216}(18-5\sqrt{3})$.
19. Пополам; $9:7$. 20. 120 *м*^{2}. 21. $\frac{5}{6}a^3$, $a^2(3+\sqrt{3})$.
22. $\frac{1}{3}a$. 23. $\frac{4}{9}a^2\sqrt{3}$. 24. В 9 раз.
25. 4800π *см*^{3}; 960π *см*^{2}. 26. $r\sqrt{3}$ или $r\sqrt{2}$.
27. $\frac{\pi a^3}{12}(5-2\sqrt{2})\approx 160$ *м*^{3}.
28. $\frac{\pi}{24}[3a^2b+3ab^2+2a^3+2b^3-2(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}]$.
29. $\frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{4\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 30. $\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$; $2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$.
31. 9 *см*, 10 *см* и 17 *см*; меньшая. 32. $\frac{1}{2}bh(a+b)$.
33. $3:7$. 34. $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{c^3}{16}$; $\frac{c^2}{4}(2+\sqrt{6})$.
37. $\frac{256\pi}{7}\approx 115$ (*см*^{3}). 38. $\frac{1}{12}\pi a^3(15-8\sqrt{2})\approx 0{,}97a^3$. 39. $3a^2$.
40. 1) 7 *м*; 2) $5:4$, 3) в призме $5:4$; в усечённой пирамиде $5:8$.
41. В 4 раза. 42. 864π *см*$^3\approx 2700$ *см*^{3}; $326\pi\sqrt{3}$ *см*$^2\approx 1800$ *см*^{2}.

СОДЕРЖАНИЕ.

Н. Рыбкин. Сборник задач по геометрии, ч. II

Редактор *С. В Пазельский.* Техн. редактор *М. И. Смирнова.*

Сдано в набор 28/I 1961 г. Подписано к печати 31/III 1961 г.
84 × 108¹/₃₂. Печ. л. 5,5 (4,51). Уч.-изд. л. 5,93.
Тираж 300 тыс. (300001—600000) экз. Цена 7 коп. Заказ № 2176.
Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Типография № 2 им. Евг Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.